Naturaleza Fractal

José Luis Ramón Pérez 2018
IES “Bajo Cinca” (Fraga)

NATURALEZA CLÁSICA

Objetos que estudia la Geometría

¿Clásico, Fractal?






El Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot es el más conocido de los conjuntos fractales, y el más estudiado. Se conoce así en honor al matemático Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) que investigó sobre él en la década de los setenta del siglo XX.

Este conjunto se define en el plano complejo del siguiente modo:

Sea c un número complejo cualquiera.

A partir de c, se construye una sucesión por inducción:

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 & \text{(término inicial)} \\ z_{n+1} & = & z_n^2 + c & \text{(relación de inducción)} \end{cases}$$

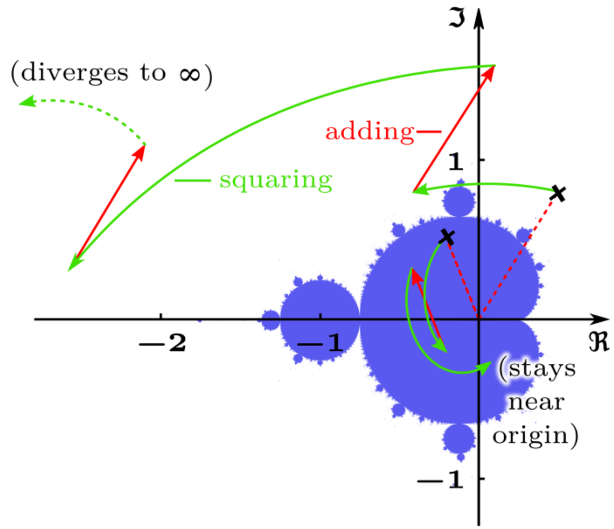
Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que **c** pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido del mismo. Por ejemplo:

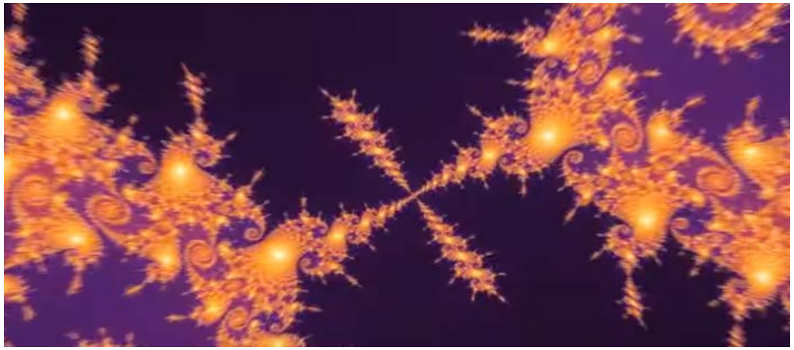
Si c = 1

Se obtiene la sucesión 0, 1, 2, 5, 26… que diverge. Como no está acotada, 1 no es un elemento del conjunto de Mandelbrot.

Si c = -1

Se obtiene la sucesión 0, -1, 0, -1,… que sí es acotada, y por tanto, -1 sí pertenece al conjunto de Mandelbrot.



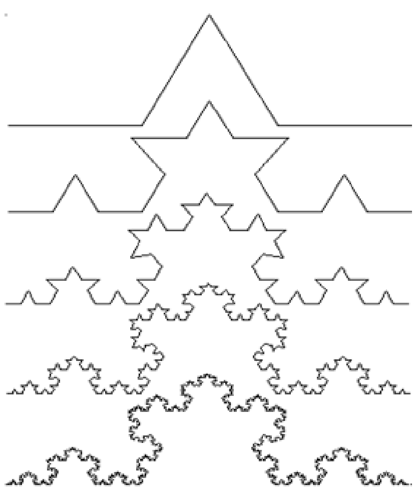


[Mandelbrot Set](https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk)
https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk

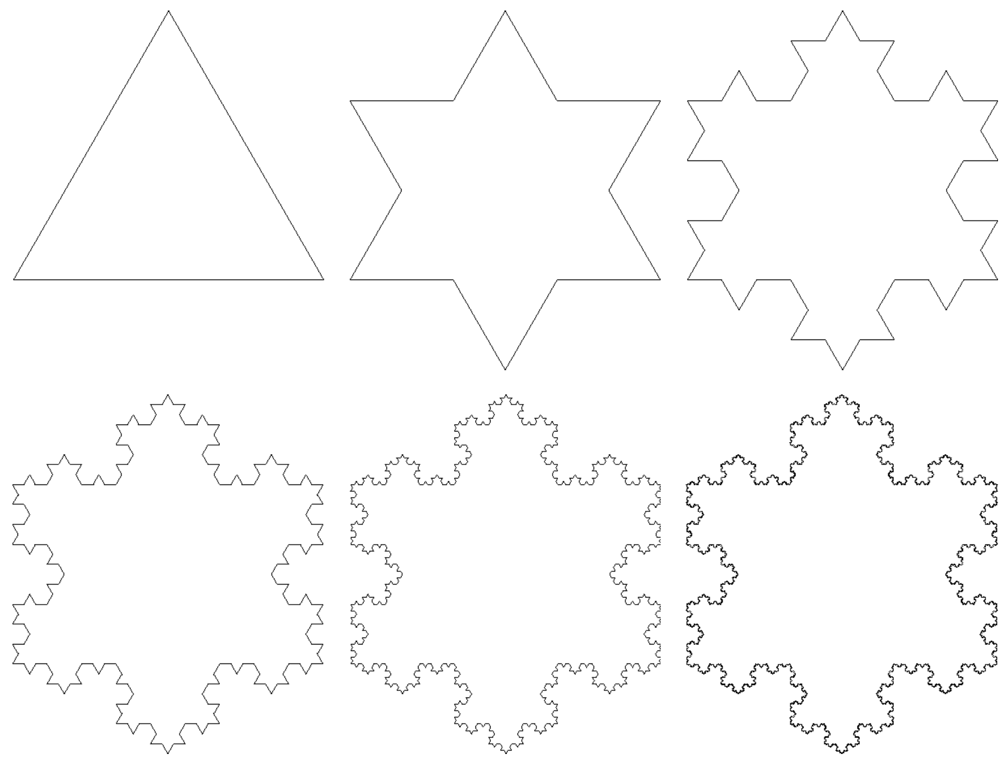
El copo de nieve de Koch

El **copo de nieve de Koch**, también llamado estrella de Koch, es una curva cerrada continua pero no diferenciable en ningún punto descrita por el matemático Helge von Koch (1870 -1924) en 1904 en un artículo titulado "Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental".

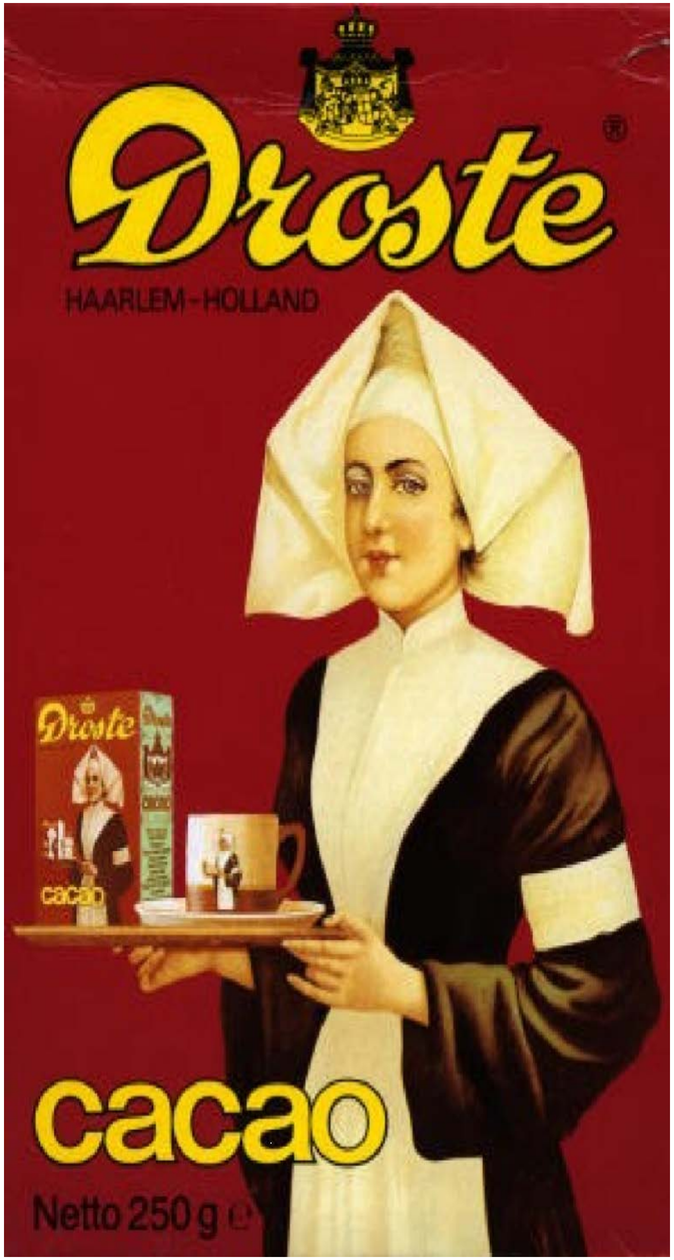
Su construcción se realiza mediante un proceso iterativo que se inicia con un triángulo equilátero en el que finalmente cada uno de sus lados queda sustituido por lo que se llama una curva de Koch.



Tres de estas curvas unidas forman el copo de nieve de Koch:



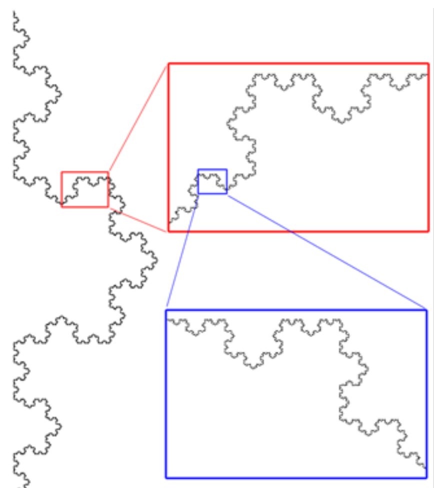
https://www.youtube.com/watch?v=PKbwrzkupaU



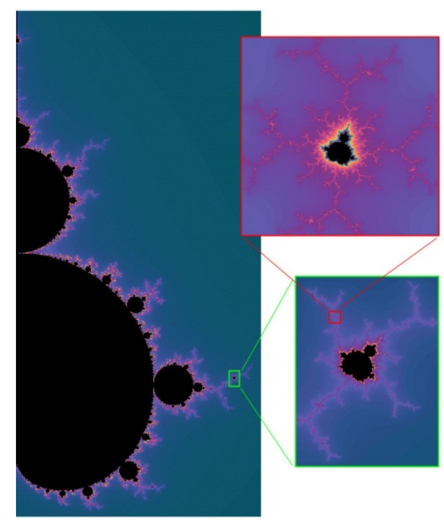
Autosimilitud

Tiene más de un siglo un anuncio de cacao en el que la imagen original se repite hasta el infinito. La idea , conocida desde entonces como **Efecto Droste**, nos proporciona un primer ejemplo de un concepto característico de los Fractales: la **Autosimilitud**

En Matemáticas, la **Autosimilitud** (estadística) o **Autosemejanza** (perfecta), es la propiedad de un objeto en el que el todo es exacta o aproximadamente similar a una parte de sí mismo.



Autosemejante (perfecto)



Autosimilar (estadístico)

L-Systems

El biólogo Aristid Lindenmayer (1925–1989), propuso en 1968 un método recursivo para modelizar el crecimiento de las plantas

Un Sistema-L es un conjunto de reglas y símbolos (una gramática formal en el sentido de Chomsky)

.Se definen como G = {V, S, ω, P}

- V (el alfabeto) es un conjunto de símbolos que contiene elementos que pueden ser remplazados (variables)
- S es un conjunto de símbolos que contiene elementos que se mantiene fijos (constantes)
- ω es una cadena de símbolos de V que definen el estado inicial del sistema (inicio o axioma)
- P es un conjunto de reglas o producciones que definen la forma en la que las variables pueden ser remplazadas por combinaciones de constantes y otras variables. Una producción está formada por dos cadenas — el predecesor y el sucesor.
- Las reglas gramaticales de los sistemas-L se aplican iterativamente a partir de un estado inicial.

L-Systems turtle renderer

http://kevs3d.co.uk/dev/lsystems/

Árbol Fractal

Variables : X
Constantes : F + − [ ]
Inicio : X
Regla : X=FX[-FX]FX[+FX][FX]

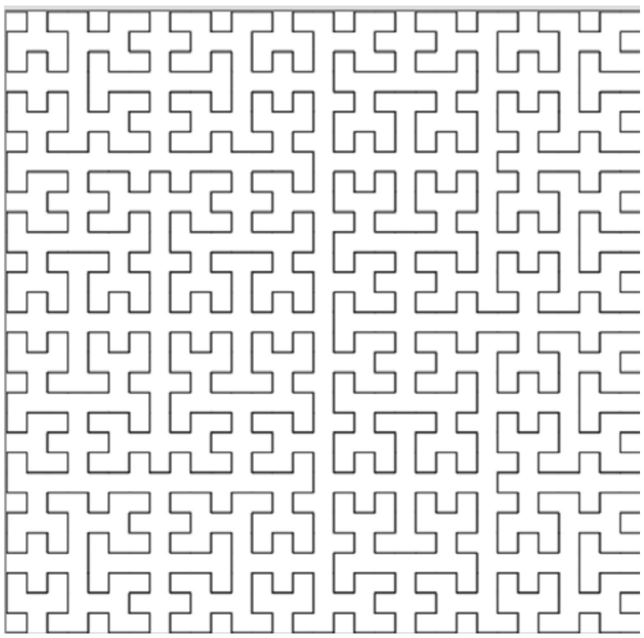
F “avanza”
+ “gira 30° a la izquierda"
- “gira 30° a la derecha"
[“avanza en la pila”
] “retrocede en la pila”

Curvas de Relleno

Todo el mundo sabe que la recta tiene dimensión 1 (largo), el plano dimensión 2 (largo y ancho) y el espacio dimensión 3 (largo ancho y alto).

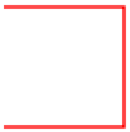
Sin embargo, dibujando una línea recta podríamos llenar todo el plano

Veamos por ejemplo la llamada curva de Hilbert (1862-1943)



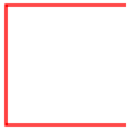
https://www.youtube.com/watch?v=wYDIW_DVnrM

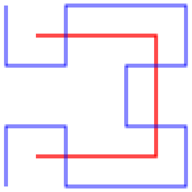
Variables : X Y
Constantes : F + − (90º)
Inicio : X
Regla 1 : X=-YF+XFX+FY-
Regla 2 : Y=+XF-YFY-FX+



Para dibujar una curva de Hilbert de orden i a la derecha de la tortuga (**X**):
1. Gira la tortuga -90
2. Dibuja una curva de orden i-1 a la izquierda
3. Avanza w dibujando
4. Gira 90
5. Dibuja una curva de orden i-1 a la derecha
6. Avanza w dibujando
7. Dibuja una curva de orden i-1 a la derecha
8. Gira 90
9. Avanza w dibujando
10. Dibuja una curva de orden i-1 a la izquierda
11. Gira -90

El algoritmo para dibujar a la izquierda (**Y**) es simétrico





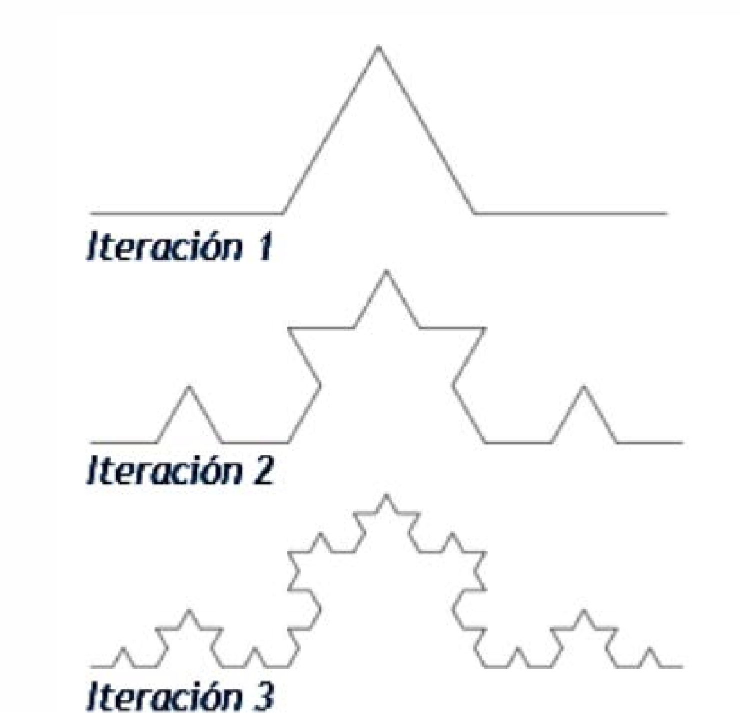
Dimensión Fractal

Dimensión de Semejanza

Parece que la curva de Hilbert, a pesar de ser un línea, debería tener dimensión 2.

¿Qué dimensión podríamos asignar a la curva de Koch?

Una idea es comparar con lo que sucede con la razón de semejanza cuando consideramos áreas o volúmenes



Si reducimos un segmento a su tercera parte, necesitamos 3 copias para obtener el original (dimensión 1) $r = 1/3 \quad n = 3 \qquad n = (1/r)^1$

Si reducimos el lado de un cuadrado a su tercera parte, necesitamos 9 copias para obtener el original (dimensión 2) $r = 1/3 \quad n = 9 = 3^2 \qquad n = (1/r)^2$

Si reducimos el lado de un cubo a su tercera parte, necesitamos 27 copias para obtener el original (dimensión 3) $r = 1/3 \quad n = 9 = 3^3 \qquad n = (1/r)^3$

En una iteración de la curva de Koch reducimos la longitud del segmento inicial a su tercera parte , y necesitamos cuatro copias del segmento, por tanto:

$r = 1/3 \quad n = 4 = 3^{1.26} \qquad n = (1/r)^{1.26}$

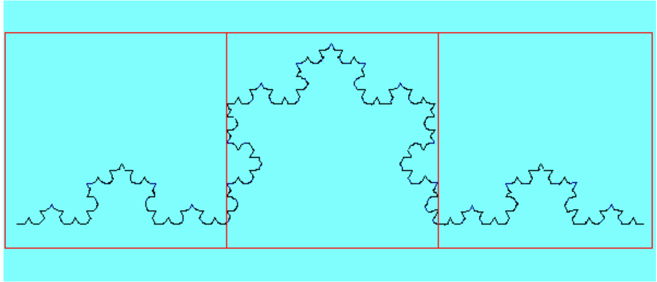
1.26 es pues la Dimensión de Semejanza de la curva de Koch

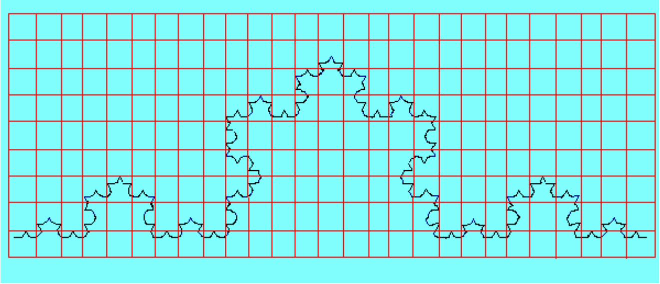
$$D_s = \log n / \log (1/r)$$

Dimensión Fractal

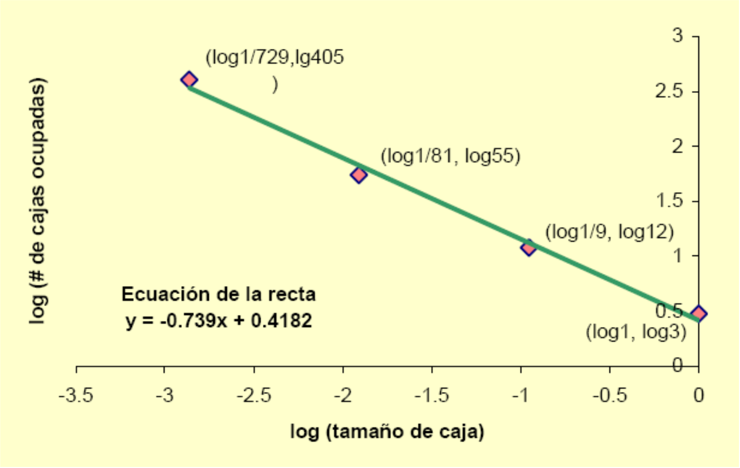
Box Counting

Otra idea es contar cuánto trozo (cajas) de plano ocupa la estructura fractal en una cuadrícula cada vez más fina.
En la primera rejilla ocupa 3 cajas de tamaño 1
En la segunda rejilla ocupa 12 cajas de tamaño 1/9
En la tercera rejilla ocupa 55 cajas de tamaño 1/81
En la cuarta rejilla ocupa 405 cajas de tamaño 1/729





Tamaño de la caja	# de cajas ocupadas
1	3
1/9	12
1/81	55
1/729	405

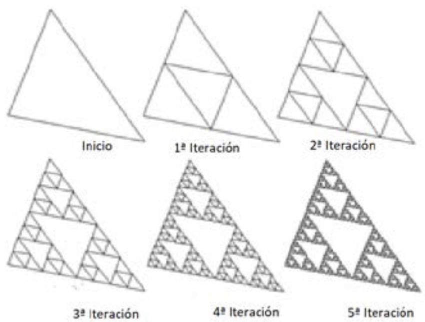


Si representamos los datos en papel logarítmico, estos se encontrarán sobre una recta (los casos reales se aproximan mediante la recta de regresión lineal)
La pendiente de esta recta nos sirve para calcular la Dimensión Fractal (sumando 2). En el ejemplo: $D = 2 + (-0.739) = 1.261$

El triángulo de Sierpinski

El matemático polaco Waclaw Sierpinski, (1882 - 1969) estudió el triángulo fractal más famoso del mundo.

Este triángulo se puede construir iterativamente a partir de un triángulo equilátero de lado la unidad:



Pavimento de la Basílica de Santa María in Cosmedín (Roma) siglo VIII

Número de triángulos en la n-ésima iteración 3^n

Longitud de los lados en la n-ésima iteración $(1/2)^n$

Área de los triángulos en la n-ésima iteración $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Dimensión Fractal

$$D_s = \log n / \log (1/r)$$
$$D_s = \log 3 / \log 2 = 1.585$$

L-System

Constantes : F + − (120º)
Inicio : F-F-F
Regla : F=F-F+F+F-F

https://profmate.wordpress.com/fractales-en-papel/

El juego del Caos (Barnsley)

https://matap.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo7/1.html

(a) Cada jugador escoge un punto inicial del interior de un triángulo ABC. Por ejemplo P2

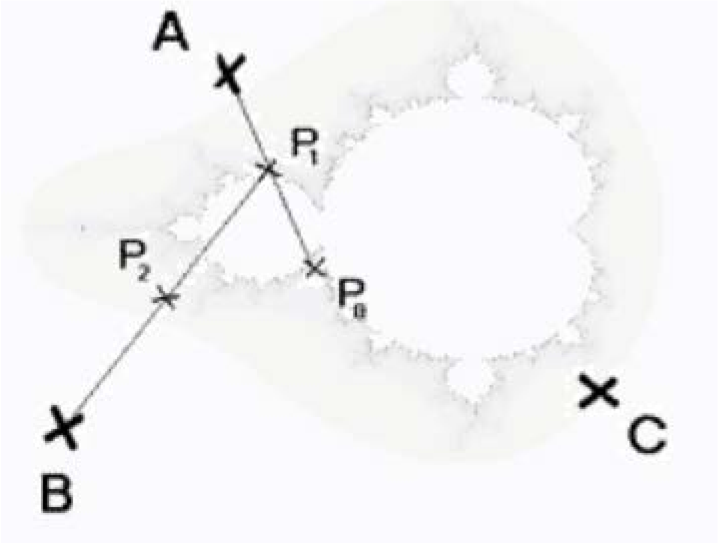
(b) Traza un segmento que une dicho punto con el vértice del triángulo más cercano. (BP2).

(c) Encuentra el punto simétrico a B con respecto a P2, (P1).

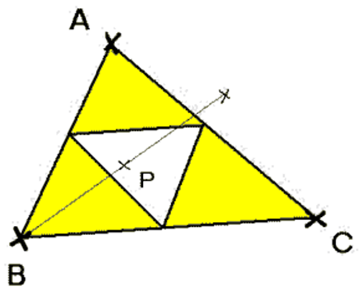
(d) Si el punto P1 está dentro del triángulo ABC repite el procedimiento con el punto P1 obtenido

(e) Consigue así una serie de puntos: P2, P1, P0 , P-1,...

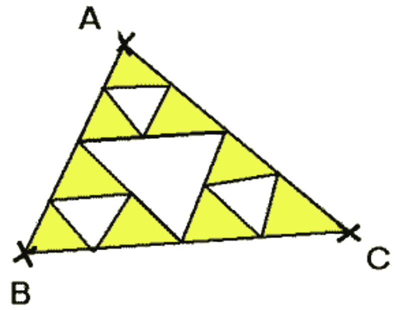
El ganador en este juego es aquel que consigue la sucesión mayor de puntos que se mantienen en el interior del triángulo. Es decir, pierde el primero que se topa con un punto fuera del triángulo.



¿Qué puntos pierden en la primera jugada?

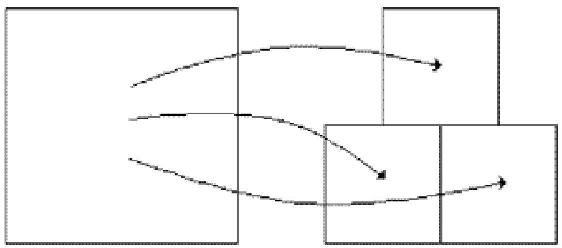


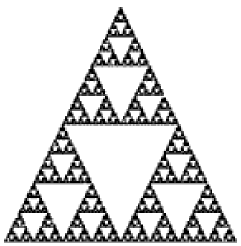
¿Qué puntos pierden en la secunda jugada?

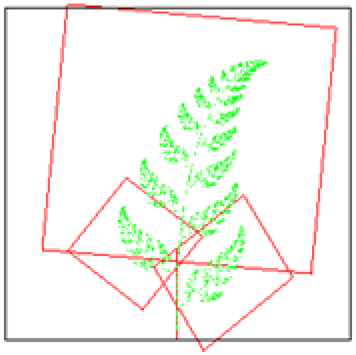


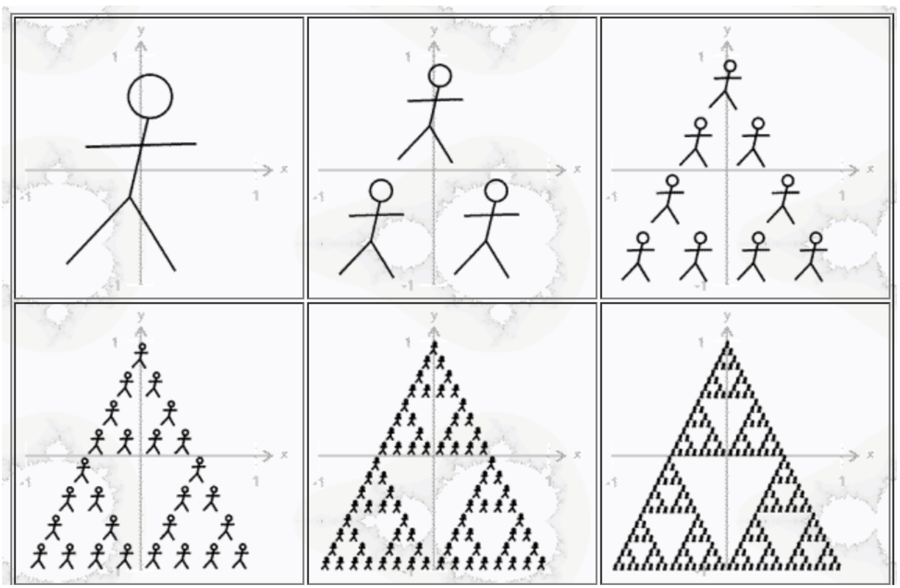
Sistemas de Funciones Iteradas (IFS)

Se denomina **Sistema de Funciones Iteradas** o IFS a un conjunto de funciones afines contractivas que se aplican sucesivamente sobre un conjunto inicial, obteniéndose “al final del proceso” un **atractor**

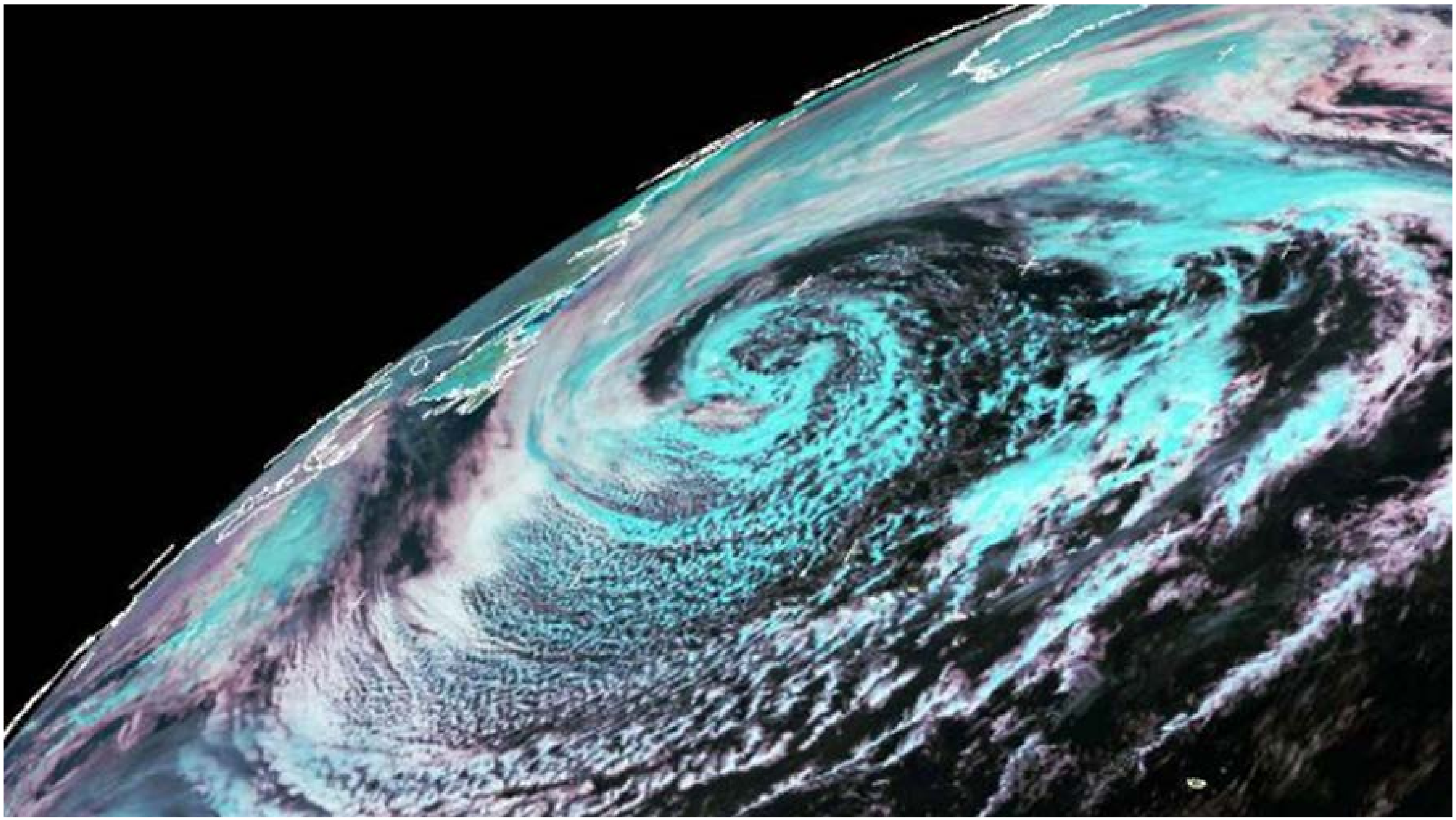






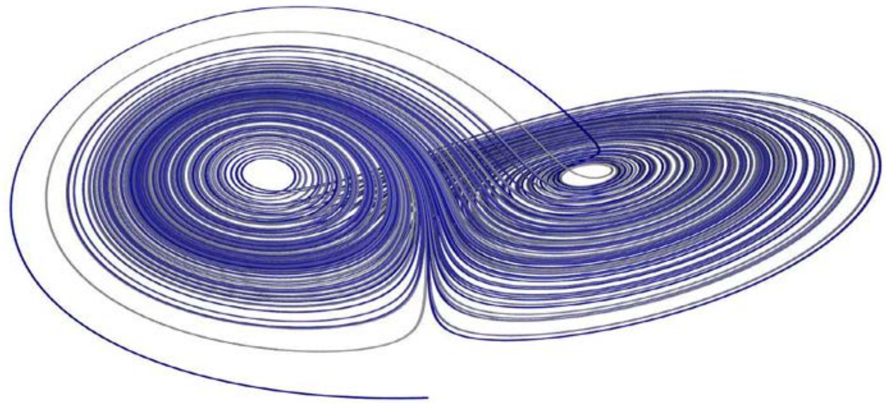


Naturaleza Caótica



Los Atractores Extraños

En 1963 el meteorólogo **Edward Lorenz** utilizó un ordenador para ver gráficamente el comportamiento de unas ecuaciones que esperaba predijeran el tiempo y se encontró con la siguiente figura.



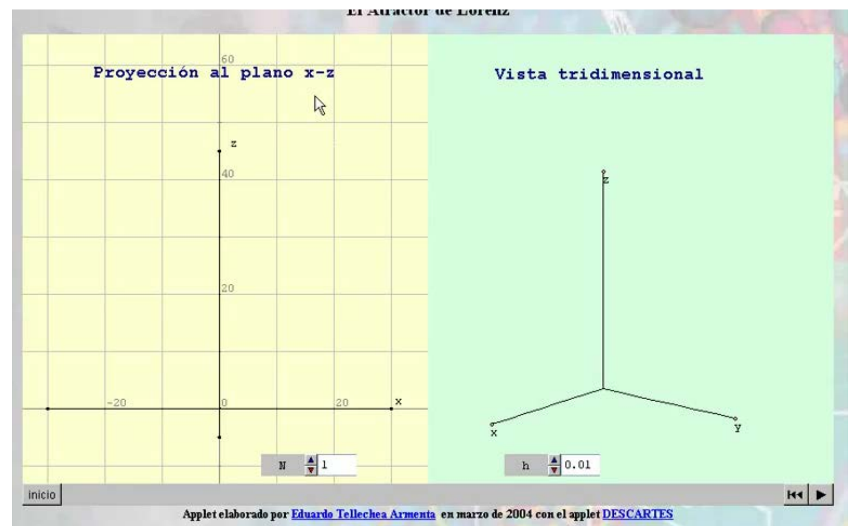
Como en el programa que utilizaba se podían introducir un máximo de 3 decimales para las condiciones iniciales, y el programa trabajaba luego con 6, hizo pruebas con diferentes parámetros y llegó a la conclusión de que las simulaciones eran muy diferentes para condiciones iniciales muy próximas.

A partir del trabajo de Lorenz se prestó especial atención a los **conjuntos límite** y a los **atractores** en los sistemas dinámicos.

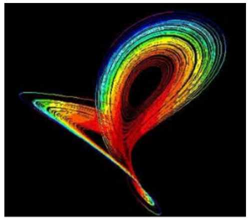
Un conjunto límite es el estado al que llega el sistema después de un tiempo infinito.

Los atractores son conjuntos límite, pero no todos los conjuntos límite son atractores: es posible que un sistema converja hacia un conjunto límite, pero que, una vez instalado en él, sufra pequeñas perturbaciones que lo alejen definitivamente de él.

Un punto fijo o un ciclo son ejemplos de atractores simples o clásicos. Si la dimensión fractal del atractor es fraccionaria, éste se denomina **atractor extraño**.



https://www.youtube.com/watch?v=2_DOSexjeE4



El Efecto Mariposa

Sensibilidad a las condiciones iniciales

“El aleteo de las alas de una mariposa se puede sentir al otro lado del mundo“ **(Proverbio chino)**

¿Que sucede al lanzar una moneda al aire?

La consecuencia práctica del efecto mariposa es que en **sistemas complejos** tales como el **estado del tiempo** o la **bolsa de valores** es muy difícil predecir lo que va a suceder con seguridad