suma+ 71
Artículos
Noviembre 2012
pp. 3-6

El problema de *Rencontre*

Miguel Barreras Alconchel

A mediados del siglo XVIII el prolífico y genial matemático suizo Leonhard Euler analizó y resolvió un juego de probabilidad con cartas llamado Rencontre. Como otros problemas probabilísticos, el enunciado es fácilmente comprensible, su análisis no es elemental y el resultado parece contrario a la intuición o, cuando menos, sorprendente. Euler utiliza, para la resolución del problema, la combinatoria y la suma de ciertas sucesiones. En este artículo se pretende llegar a la misma conclusión recurriendo a unas matemáticas más cercanas al alumno de bachillerato.

Palabras clave: Probabilidad, Resolución de problemas, Historia de las Matemáticas, Enseñanza y aprendizaje.

The *Rencontre*'s Problem

By the middle of the XVIIIth century, the prolific and brilliant Swiss mathematician Leonhard Euler analyzed and solved a probability cards game called Rencontre. As it happens with other probability problems, the game has an easily and understandable wording, its study is simple and the result seems to be surprising, far from the one expected. In order to solve the problem, Euler uses the Combinatorial Theory and the addition of sequences. This paper aims to reach the same conclusion using a kind of Mathemtics much closer to an average high school student.

Key words: Probability, Problem Solving, History of Mathematics, Teaching and Learning.

El problema

Leonhard Euler es, sin duda, el matemático más prolífico de la historia. Entre otros muchos textos (69 tomos son necesarios para contener todos los de su *Opera Omnia*), escribió diversos trabajos sobre Estadística y Probabilidad. En uno de ellos, *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*, publicado en las *Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin* (1753)[1], abordó el siguiente problema:

> El Juego de *Rencontre* es un juego de azar en el que dos personas, con un mazo completo de cartas cada una, sacan a la vez una carta detrás de otra hasta que gana una de ellas si sacan la misma carta. Si no tiene lugar dicha coincidencia, entonces gana la otra persona. Con estos supuestos, se pregunta la probabilidad de ganar que tiene cada persona.

Este juego ya había sido planteado y resuelto unas décadas antes por Montmorti[2]. Se llamó entonces *Treize*, puesto que se partía de un mazo de trece cartas (el número de cartas de un palo de una baraja francesa).

De Moivre también lo estudió en 1718[3]. Seguramente Euler no conocía esos resultados y por eso se aplicó a él y lo resolvió.

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en junio de 2011

El método de Euler

Sus razonamientos son claros y cercanos al lector actual. No olvidemos que Euler es, sin duda, uno de los mayores inventores de signos matemáticos. A él se deben las notaciones para los números e, el número π, la unidad imaginaria i, el símbolo de sumatorio, Σ, la expresión para una función, $f(x)$, tales como hoy los conocemos.

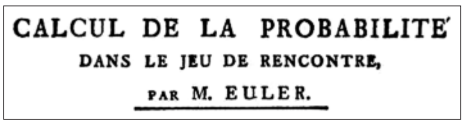
Euler explica su procedimiento:

> A tal efecto es necesario hacer algunas observaciones generales que nos conduzcan al conocimiento de las probabilidades para números grandes de cartas, conociendo las probabilidades para números más pequeños.

Con razonamientos combinatorios, llega a resolver casos sencillos para, después, generalizar los resultados usando sumas de sucesiones del tipo:

$$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\pm\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

Recordemos que Euler era especialista en este tipo de cálculos. Llega incluso al caso de infinitas cartas, sumando una serie que, curiosamente, involucra al número e. Un trabajo elegante, sin duda.


CALCUL DE LA PROBABILITÉ
DANS LE JEU DE RENCONTRE,
PAR M. EULER.

Portada del opúsculo de Euler

Nuestra solución

Antes de enfrentarnos al problema es interesante apelar a nuestra intuición: ¿Qué es más ventajoso, apostar a que va a haber coincidencia o al contrario? Habiendo apostado a la coincidencia, ¿qué resultará más favorable, jugar con 10 cartas (los 10 oros de una baraja española, por ejemplo), con 40 (una baraja completa española), o con 52 (una baraja francesa)? Es probable que la intuición viaje indecisa entre las distintas opciones, de igual manera que divaga en la contemplación de algunas imágenes ambiguas. Lo que, de entrada, tenemos claro es que con una carta la probabilidad de coincidencia es 1 y con dos, 1/2.

Vamos a analizar el problema con 7 cartas. La generalización posterior resultará obvia.

No hay pérdida de generalidad en suponer que el jugador A destapa sus cartas y que sus cartas están ordenadas en la mesa del 1 al 7. El jugador B juega a que va a haber alguna coincidencia. El jugador A despliega sus 7 cartas (sus 7 números) y el jugador B enfrenta el desorden desconocido de sus cartas tapadas en la mesa de juego. La suerte está echada. Habrá coincidencia o no.

Juego de *Rencontre*: situación 1 (posición inicial)

Antes de seguir, tenemos que coincidir en una cosa. Se levantarán las cartas del jugador B, el que las tiene tapadas y juega a que hay alguna coincidencia, y, si la hay, el jugador B ganará. De lo contrario, perderá. Pero *el orden en el que se vayan destapando las cartas del jugador B no importará en el análisis de la situación*.

Tomémonos un tiempo para reflexionar sobre esta última afirmación. Cuando ya hayamos aceptado ese lema, sigamos adelante, pues el problema casi está resuelto.

Hay que empezar a jugar por algún sitio. B levanta su primera carta tapada de la izquierda. Si sale 1 ya ha ganado. Ha tenido muy buena suerte. Una probabilidad de 1/7. No ganará, de momento, con un 6/7 de probabilidad. Pero no hay que desesperar. El juego sigue.

Pongamos que le salió el 5. B puede levantar la que quiera, pero el matemático, para el análisis, levanta la pareja del 5 de A.

Puede salir el 1. ¿Qué pasa si sale el 1? Que nos quedan, ya no 7 cartas enfrenta-

Juego de *Rencontre*: situación 2

das con sus números, sino 5. Y el problema se simplifica.

Llamaremos P_n a la probabilidad de ganar (que haya coincidencia) con n cartas. En el caso anterior nos plantaríamos en P_5. Y por ahí, podremos seguir tirando de forma recurrente. Ya veremos, echando cuentas un poco más tarde, cómo.

Pero sigamos con las cartas. Vamos a ver todas las posibilidades. Supongamos que la segunda carta no cerrara ciclo, que no fuera un 1; que fuera, por ejemplo, un 3.

Juego de *Rencontre*: situación 3

¿Qué haría el matemático analista? Levantar la pareja del 3. Si esa carta fuera un 1 se cerraría ciclo y el problema pasaría por calcular P_4: los destapados de A, 2, 4, 6 y 7, enfrentados a los mismos tapados de B en un orden incierto.

Juego de *Rencontre*: situación 4

Mediante un diagrama de árbol podemos desgranar las probabilidades que se nos plantean. No es difícil seguir el procedimiento del matemático decidido que quiere llegar a la solución final.

Así, la probabilidad de que haya coincidencia con 7 cartas, la que hemos llamado P_7 es:

$$P_7 = \frac{1}{7} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot P_5 + \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot P_4 + \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot P_3 +$$
$$+\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot P_2 + \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot P_1 =$$
$$= \frac{1}{7}\cdot\left(1 + P_5 + P_4 + P_3 + P_2 + P_1\right)$$

Y, en general, para $n > 2$:

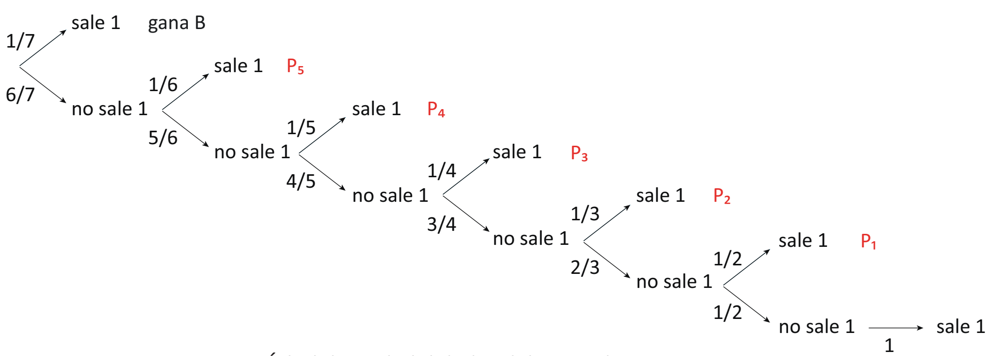
$$P_n = \frac{1}{n}\cdot\left(1 + P_{n-2} + P_{n-3} + \ldots + P_3 + P_2 + P_1\right)$$

siendo, obviamente, $P_1 = 1$ y $P_2 = 1/2$. De aquí se obtiene fácilmente la ley de recurrencia que nos proporciona todas las probabilidades:

$$P_{n+2} = \frac{1}{n+2}\cdot\left(1 + P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \ldots + P_2 + P_1\right) =$$
$$= \frac{1}{n+2}\cdot\left(1 + P_n + P_{n-1} + n\cdot P_n - 1\right)$$

Por tanto:

$$\left(n+2\right)\cdot P_{n+2} = (n+1)\cdot P_n + P_{n-1}$$



Árbol de probabilidades del juego de Rencontre

De donde se deriva la fórmula general:

$$P_{n+2} = \frac{(n+1) \cdot P_n + P_{n-1}}{n+2}$$

Dividiendo los términos de la igualdad anterior por P_{n+1} y tomando límites en el infinito obtenemos:

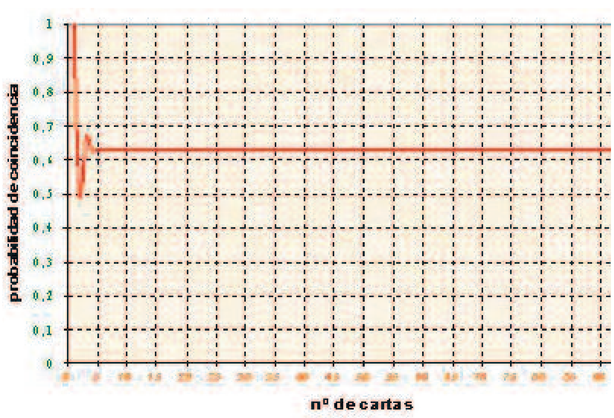
$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)} \cdot \frac{P_n}{P_{n+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)} \cdot \frac{P_{n-1}}{P_{n+1}}$$

Llamando w al límite buscado:

$$w = \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{P_{n+1}}{P_n}$$

Ha de cumplirse la igualdad: $w = 1/w$. Y así, $w = 1$, lo que quiere decir que la sucesión de probabilidades se estabiliza conforme aumenta el número de cartas. He aquí la primera conclusión sorprendente.

Para acabar, nos preguntamos cuánto vale ese límite y a partir de cuántas cartas la sucesión se hace estable. Ya se han comentado los primeros valores de la sucesión de probabilidades: $P_1 = 1$, $P_2 = 1/2$. Los restantes nos los da el programa *Excel* (tanto en gráfico como en tabla):



$P_1 = 1$

$P_2 = 0{,}5$

$P_3 = 0{,}6666...$

$P_4 = 0{,}625$

$P_5 = 0{,}6333...$

$P_6 = 0{,}6319444...$

$P_7 = 0{,}63214286$

$P_8 = 0{,}63211806$

$P_9 = 0{,}63212081$

$P_{10} = 0{,}63212054$

$P_{11} = 0{,}63212056$

Vemos que la probabilidad de coincidencia se estabiliza muy rápido. Puede observarse que el número de cartas es prácticamente irrelevante a partir de cinco. La probabilidad de que haya coincidencia es 0,63212056. ¿Sorprendente?

Como apuntábamos al principio este número está estrechamente relacionado con el número e, pues se trata, precisamente, de $1 - 1/e$.

Referencias bibiográficas

Boyer, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

Dunham, W. (2000): *Euler. El maestro de todos los matemáticos*, Nivola, Madrid.

Meavilla Seguí, V. (2007): «Leyendo a Leonhard Euler (1707-1783): Cálculo de Probabilidades en el juego de rencontre», *Sigma*, n.° 30, 189-203.

Miguel Barreras Alconchel
IES Matarraña (Valderrobres, Teruel)
<pelanium@yahoo.es>

1 En la revista *Sigma*, n.° 30, hay una traducción de Vicente Meavilla Seguí: *Leyendo a Leonhard Euler (1707-1783): Cálculo de Probabilidades en el juego de rencontre*. Puede accederse a ella directamente a través de la web: <http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_30/17_ley_euler.pdf>

2 Montmort, Pierre Rémond (1708): *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*.

3 Moivre, Abraham de (1718): *The Doctrine of Chance*.