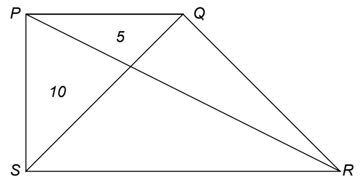
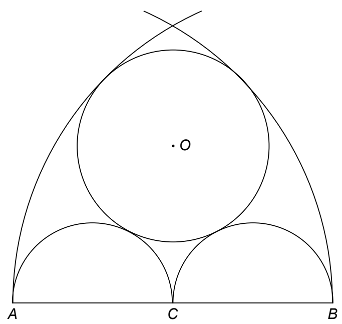
Soluciones

Problema 1. En el trapecio rectángulo $PQRS$ trazamos las diagonales, siendo 5 y 10 las áreas de dos de los triángulos que determinan, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del trapecio?

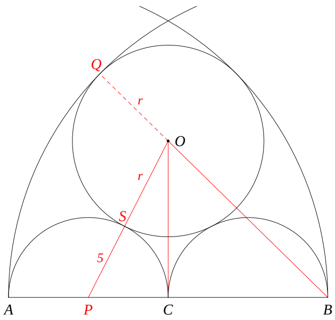


Solución. Llamemos X al punto en el que se cortan las dos diagonales. Como el triángulo ΔPSQ y el triángulo ΔPRQ tienen la misma base y la misma altura, sus áreas serán iguales y, por tanto, el área del triángulo ΔPXS es igual al área del triángulo ΔQXR e igual a 10. Para calcular el área del trapecio solo nos falta obtener el área del triángulo ΔSXR. Ahora bien, este triángulo es semejante al triángulo ΔPXS. Si obtenemos la razón de semejanza obtendremos inmediatamente el área. Ahora bien, los triángulos ΔPXQ y ΔPSQ tienen la misma base y el segundo el triple de área, por lo que la altura de ΔPSQ es el triple de la altura de ΔPXQ. Puesto que la altura de ΔPSQ es PS, igual a la suma de las alturas de ΔPXQ y ΔSXR, se deduce que la altura de ΔSXR es el doble de la de ΔPXQ y por tanto el área de ΔSXR es cuatro veces la de ΔPXQ, es decir ΔSXR tiene área 20 y el área del trapecio es igual a 45.

Problema 2. Determinar el radio de la circunferencia de centro O que es tangente a las dos semicircunferencias de diámetros AC = CB = 10 cm y a los arcos de centros A y B y radio AB.

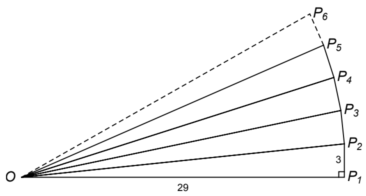


Solución. Sea P el centro de la semicircunferencia de diámetro AC; S el punto de tangencia con la circunferencia de la cual queremos determinar su radio r y Q el punto de tangencia entre la circunferencia de centro B y radio AB = 40, como se ve en el dibujo.



Consideremos los triángulos rectángulos ΔPOC y ΔBOC, que comparten el lado OC. Por la propiedad de tangencia, los puntos P, S y O están alineados, lo mismo que los puntos B, O y Q.
Por tanto, $PO = r + 5$ y $BO = 20 - r$. Puesto que PC = 5 y BC = 10 resulta $(r+5)^2 - 5^2 = (20-r)^2 - 10^2 \Rightarrow 10r = 300 - 40r \Rightarrow r = 6$.

Problema 3. La sucesión de puntos $P1, P2, \cdots$, describe una espiral en torno al punto O, de manera que, para $j \geq 1$, cada uno de los triángulos P_jOP_{j+1} es rectángulo y $P_jP_{j+1} = 3$. Si $OP_1 = 29$, ¿ cuál es el siguiente valor de n para el que OP_n es un número entero?



Solución. Puesto que cada uno de los triángulos ΔP_jOP_{j+1} es rectángulo, siendo la hipotenusa OP_{j+1}, se tiene que:

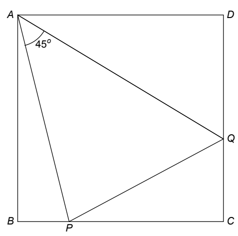
$$OP_2 = OP_1^2 + 3^2, OP_3^2 = OP_2^2 + 3^2 = OP_1^2 + 2{,}3^2, \cdots, OP_n^2 = OP_1^2 + (n-1){,}3^2$$

Como $OP_1 = 29$, buscamos un valor de n tal que $29^2 + 9(n-1) = k^2$, con k un entero positivo. Manipulando la expresión anterior se tiene

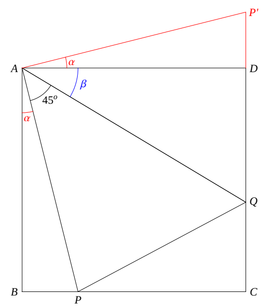
$$9(n-1) = k^2 - 29^2 = (k-29)(k+29)$$

De aquí se deduce que $k > 29$ y que 9 divide al producto $(k-29)(k+29)$. Aquí hay dos posibilidades. Por un lado podría ser que cada uno de los dos factores, $(k-29)$ y $(k+29)$ fueran múltiplos de 3. Pero eso no puede ser, ya que si ambos lo fueran, también lo sería su diferencia. Como $(k+29)-(k-29) = 58$ no es múltiplo de 3, ambos factores no pueden ser a la vez múltiplos de tres. Por tanto uno de ellos es múltiplo de 9. Siendo $k > 29$, el primer valor de k para el que alguno de los factores es múltiplo de 9 es $k = 34$, pues en ese caso $k + 29 = 63$. Así pues, se tiene $9(n-1) = 5 \cdot 63 \Rightarrow n = 36$ y $OPn = 34$.

Problema 4. Dado un cuadrado $ABCD$ de lado L, se escoge P, en BC, y Q, en CD, de manera que el ángulo $\angle PAQ = 45^o$. Calcular el perímetro del triángulo ΔPQC.



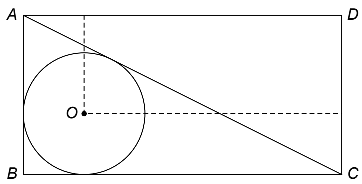
Solución. Tomemos el triángulo ΔABP y llevémoslo sobre el lado AD del cuadrado, como en la siguiente figura.



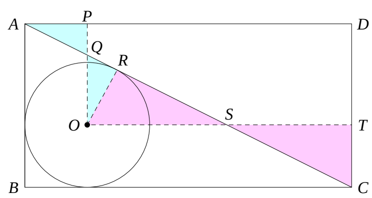
Los ángulos α y β suman 45^o, por lo que los triángulos ΔAPQ y $\Delta AQP'$ son iguales ya que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos. Por tanto, el lado PQ es igual a $QP' = QD + DP' = QD + BP$. De aquí se deduce que el perímetro de ΔPQC es

$$PQ + CQ + PC = BP + PC + CQ + QD = BC + CD = 2L.$$

Problema 5. En el rectángulo $ABCD$ de área 2016 se ha dibujado una circunferencia de centro O inscrita en el triángulo ΔABC. ¿ Cuál es el área del rectángulo de lados paralelos al inicial en el que O y D son vértices opuestos?

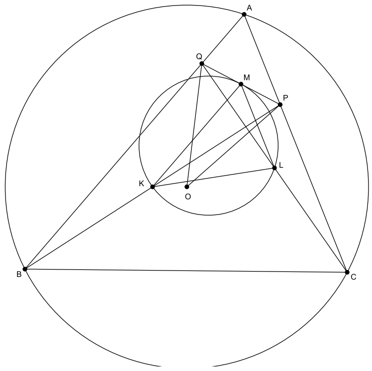


Solución. La solución casi se puede ver sin palabras, a través del siguiente dibujo



Los triángulos ΔAPQ y ΔORQ son iguales, por tener los ángulos iguales y ser $AP = OR$. Análogamente, los triángulos ORS y CTS son iguales. Por lo tanto, el área del rectángulo $POTD$ es igual al área del triángulo ΔADC que es la mitad del rectángulo original, que es 1008.

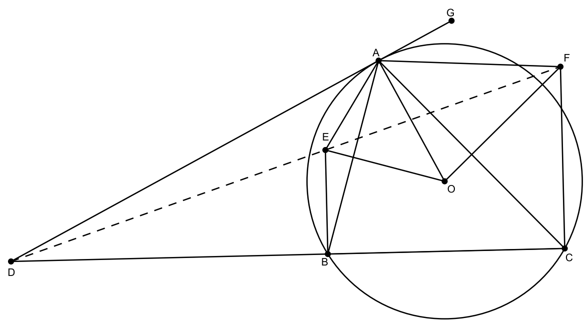
Problema 6. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Sean P y Q puntos interiores de los lados CA y AB, respectivamente. Sean K, L y M los puntos medios de los segmentos BP, CQ y PQ, respectivamente, y Γ la circunferencia que pasa por K, L, y M. Se sabe que la recta PQ es tangente a la circunferencia Γ. Demostrar que $OP = OQ$.



Solución. Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Calculando la potencia de Q respecto a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC de dos formas distintas tenemos que $AQ \cdot QB = R^2 - OQ^2$ ó $OQ^2 = R^2 - AQ \cdot QB$. Análogamente obtenemos $OP = R^2 - AP \cdot PC$. Por tanto, bastará probar que $AQ \cdot QB = AP \cdot PC$ ó $\frac{AQ}{AP} = \frac{PC}{QB}$.

Como PQ es tangente a Γ en M y $ML \| PC$ por ser M y L los puntos medios de PQ y QC, respectivamente, tenemos que $\angle MKL = \angle LMP = \angle APQ$. Análogamente deducimos que $\angle MLK = \angle AQP$. Entonces, $\triangle APQ \sim \triangle MKL$. Así, $\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{2ML}{2MK} = \frac{PC}{QB}$ por ser K,L y M los puntos medios de BP, CQ y PQ, respectivamente. Queda así probado el enunciado.

Problema 7. En el triángulo $\triangle ABC$, $AB < AC$ y O es su circuncentro. Sea D el punto de intersección de la recta tangente a la circunferencia en A con la recta BC. Sea E la intersección de la mediatriz del segmento AB con la recta perpendicular a BC en B y sea F la intersección de la mediatriz del segmento AC con la recta perpendicular a BC en C. Probar que D, E y F están alineados.



Solución. Como OE y OF son las mediatrices de AB y AC, respectivamente, deducimos que $\angle AOE = \angle ACB$ y $\angle AOF = \angle ABC$. Además, $\angle OFA = 90 - \angle FAC = 90 - \angle FCA = \angle ACB$ y análogamente $\angle OEA = \angle ABC$. Por tanto, $\triangle AEO$ y $\triangle AOF$ son semejantes a $\triangle ABC$. Luego obtenemos, respectivamente, $AE = \frac{AO \cdot AB}{AC}$ y $AF = \frac{AO \cdot AC}{AB}$. Así que $\frac{BE}{CF} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB^2}{AC^2}$. El enunciado es equivalente a probar que $\triangle BED \sim \triangle CFD$, o bien $\frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD}$. Usando que $DB \cdot DC = DA^2$ tenemos

$$\frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD} \iff \frac{AE}{AF} = \frac{BD}{CD} \iff \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD} \iff \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD^2}{DA^2} \iff \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DA},$$

pero la última igualdad es inmediata usando el Teorema del seno:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ABD} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{AC}.$$

Esto completa la demostración.