RALLYE MATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

SOLUCIONES

PRUEBA

2004

1- ¡No olvidéis los botes¡

Tendríamos cuatro caras de cada cubo de 3, 2 y 1 metro cuadrado y la parte superior visible sería otra cara de 3 metros cuadrados.

En total hay que pintar:

$(1+4)\cdot 3^2 + 4\cdot 2^2 + 4\cdot 1^2 = 65\ m^2$

El número de botes será: 65:5=**13 botes**

2 – ¡Por fin revelada la avanzada edad del Capitán!

Llamamos X a la edad del Capitán, H al número de hijos, N al número de nietos y B al número de biznietos:

$$X = H + N + B = H + H\cdot H + H\cdot H\cdot H = H + H^2 + H^3$$

Vamos dando valores a H:

H	1	2	3	4
X	3	14	39	84

Como la edad del capitán es avanzada no puede ser 39 luego será **84**

3 – Compras ruinosas

<u>1ª Forma de resolución</u>:

Paso a paso.

Si llamamos x al total del dinero que llevaba María, en la primera tienda habrá gastado: $\left(\frac{x}{2}+10\right)$

Le queda: $x - \left(\frac{x}{2}+10\right) = \frac{x}{2} - 10$

En la segunda tienda habrá gastado: $\frac{\left(\frac{x}{2}-10\right)}{2} + 10 = \frac{x+20}{4}$

Cuando entra a la tercera tienda le queda: $\left(\frac{x}{2}-10\right) - \frac{x+20}{4} = \frac{x-60}{4}$

Como lo gasta tiene que ser: $\frac{x-60}{4} = \frac{\left(\frac{x-60}{4}\right)}{2} + 10$

Es decir:

$$\frac{x-60}{4} = \frac{x+20}{8}$$

De donde x=140 euros llevaba María inicialmente.

2ª Forma de resolución:

Empezamos por el final.

En la última tienda lo que se gasta es lo que le quedaba cuando entró:

Llamamos x a lo que se gasta en la última tienda: $10+\frac{x}{2}=x$ luego x=20

Llamamos y a lo que se gasta en la segunda tienda: $10+\frac{y}{2}=y-20$ luego y=60

Llamamos z a lo que se gasta en la primera tienda: $10+\frac{z}{2}=z-60$ de donde z=140

Que es lo que tenía inicialmente.

3ª Forma de resolución:

Por restos.

Observamos que los restos son siempre de la forma: $\frac{x}{2}-10$

Entonces el último resto, que debe ser cero puesto que gasta todo, se obtendrá como:

$$\frac{\frac{\frac{x}{2}-10}{2}-10}{2}-10=0$$

Operamos:

$$\frac{\frac{x-20}{4}-10}{2}-10=0$$

$$\frac{x-60}{8}-10=0$$

$$\frac{x-140}{8}=0$$

De donde x=140

4 – Ana, Victoria y Eduardo en el AVE

Llamamos x a la distancia entre Zaragoza y Córdoba. Aplicamos que: $t=\frac{d}{v}$

En el primer tercio el tiempo transcurrido será: $t_1=\frac{x/3}{250}$

El tiempo transcurrido en el segundo tercio es: $t_2=\frac{x/3}{275}$

En el último tercio de trayecto el tiempo transcurrido será: $t_3=\frac{x/3}{225}$

Como la duración del viaje ha sido de tres horas tendremos:

$$3 = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{x/3}{250} + \frac{x/3}{275} + \frac{x/3}{225}$$

$$\frac{x}{3}\left(\frac{1}{250} + \frac{1}{275} + \frac{1}{225}\right) = 3$$

$$x\left(\frac{99 + 90 + 110}{24750}\right) = 9$$

Luego

$$x = \frac{9 \cdot 24750}{299} = 744{,}983\ km$$

Obtenemos que x≈744,983km es la distancia de Córdoba a Zaragoza

5 –La vaca lechera

1ª Forma de resolución:

Sea x=nº total de vacas

Sea y= nº días en que Rosa da leche

$$5350 = 31(x-1)10 + 10y\ con\ 1 \leq y \leq 31\ días$$

$$5350 = 310x - 310 + 10y$$

$$31x + y = 566$$

$$31x = 566 - y$$

es decir $566 - y = \dot{31}\ (múltiplo\ de\ 31)\ \ con\ 1 \leq y \leq 31$

luego $566 - 1 = 565 \geq 566 - y \geq 566 - 31 = 535$

Buscamos un múltiplo de 31 comprendido entre 535 y 565. El único múltiplo que cumple esa condición es 558: 566-y=558=31x

Entonces y=8 x=18

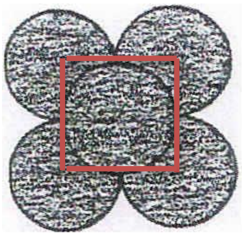
Hay 18 vacas y la vaca Rosa da leche sólo 8 días en el mes de enero.

2ª Forma de resolución:

Dividiendo el total de litros por 31 días y por 10 litros que da una vaca normal cada día obtenemos: $\frac{5350}{31 \cdot 10} = 17{,}258\, vacas$ Parece que el número de vacas debe ser 18 y ese resultado se debe a que la vaca Rosa da menos leche.

La leche que daríanda Rosa será: 5350 - 17·31·10=80 litros que teniendo en cuenta que a cada día le corresponde 10 litros da un total de 8 días.

6 – La Flor de Fernando



El área será la del cuadrado de lado 2cm $(2^2 = 4)$ que se obtiene uniendo los centros de las circunferencias y cuatro veces las tres cuartas partes de una circunferencia de radio 1cm:

$$\frac{3}{4}\pi \cdot 1^2$$

Luego $A = 4 + 4\frac{3}{4}\pi = 4 + 3\pi \approx 13{,}4cm^2$

7 – Un pez para dos pájaros

<u>1ª Forma de resolución</u>:

Llamamos x a la distancia de la base del árbol más grande al pez, 25-x a la distancia de la base del árbol pequeño al pez , y a la distancia de los pájaros al pez (es la misma)

Se tiene que:$y^2 = 10^2 + (25 - x)^2$

Y que $y^2 = 15^2 + x^2$

Igualando se obtiene: $225 + x^2 = 100 + 625 + x^2 - 50x$

$$50x = 500$$

X=10m es la distancia del pez al árbol más grande.

<u>2ª Forma de resolución</u>:

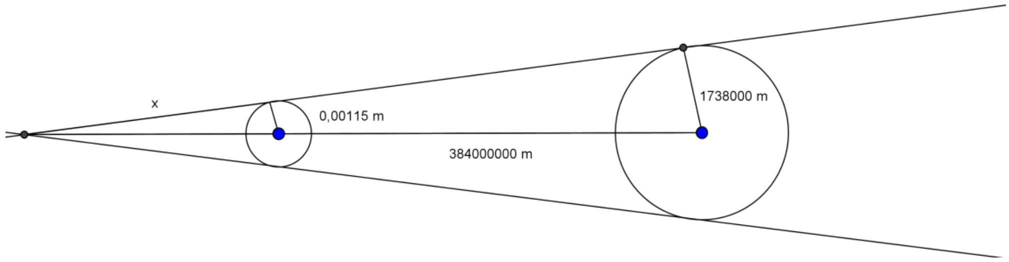
Tenemos dos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa. Además coincide que en nuestro caso las suma de los catetos conocidos de los triángulos es 10+15=25 . Por lo que vemos que la solución de nuestro problema se obtiene dando el valor de un cateto conocido de uno de los triángulos, al cateto desconocido del otro triángulo porque así se cumpliría Pitágoras ($x^2 = 10^2 + 15^2$) en los dos triángulos así como la condición de que la suma sea 25. Esto es, trendríamos dos triángulos con hipotenusa x y con catetos 10 y 15.

En conclusión: la distancia que nos piden corresponde al triángulo rectángulo cuyo cateto conocido era 15 por lo que el otro cateto será 10.

8- Un euro para ocultar la luna

Por proporcionalidad:

$$\frac{384000000}{1738000} = \frac{x}{0{,}0115}$$



$$x = \frac{3{,}84 \cdot 10^8 \cdot 1{,}1510^{-2}}{1{,}738 \cdot 10^6} = 2{,}54$$

Luego debe poner la moneda a una distancia de

$\boldsymbol{x \approx 2{,}54\ m}$

9– La mesa de Hércules

<u>1ª Forma de resolución</u>**:**

Llamando x=nº de cíclopes

Y= nº centauros

$$\begin{cases} x + 2y = 16 \\ x + y + 1 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 16 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$y = 4$$

Resolviendo obtenemos x=8 cíclopes y=4 centauros

El total de piernas será; $8 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 = \mathbf{34\ piernas}$

<u>2ª Forma de resolución</u>**:**

Si multiplicamos por 2 el número de ojos obtenemos 32=2(x+2y)=2x+4y que será el número de piernas de centauros y cíclopes puesto que tanto los centauros como los cíclopes tienen el doble de piernas que de ojos. Sólo nos falta añadir las dos piernas de Hércules y obtenemos un total de 32+2=34 piernas.

10. – Los tres terrenos

El círculo tendrá de radio r: $\pi r^2 = 1000$ luego $r = 10\sqrt{\frac{10}{\pi}} \approx 17{,}84\ m$

El cuadrado tendrá de lado l: $l^2 = 1000$ de donde $l = 10\sqrt{10} \approx 31{,}62\ m$

El triángulo equilátero tendrá de lado L:

$$\begin{cases} L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ L \cdot h = 1000 \end{cases}$$

Con $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ L$ se tiene: $\frac{1}{2}\left(L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ L\right) = 1000$

$L^2 = \frac{4000}{\sqrt{3}}$ $\quad L = \sqrt{\frac{4000}{\sqrt{3}}} = 20\sqrt{\frac{10}{\sqrt{3}}} \approx 48{,}06$

Hallamos los perímetros:

El del círculo: $2\pi r = 2\pi 10\sqrt{\frac{10}{\pi}} = 20\pi\sqrt{\frac{10}{\pi}} \approx 112{,}1\ m$

El del cuadrado: $4l = 40\sqrt{10} \approx 126{,}49\ m$

El del triángulo equilátero: $3L = 60\sqrt{\frac{10}{\sqrt{3}}} \approx 144{,}17\ m$

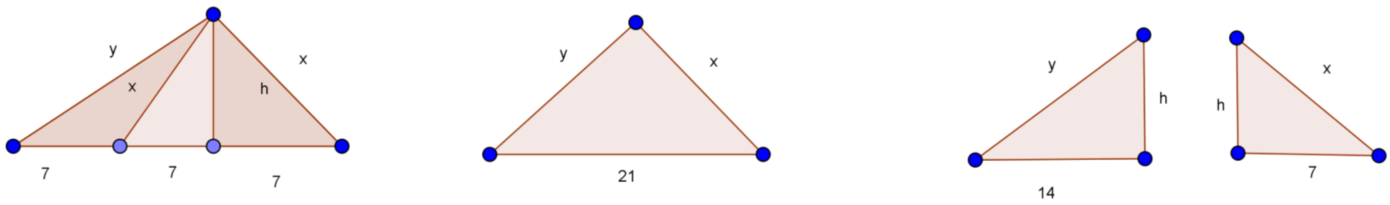
El mayor perímetro es el del triángulo y vale 144,17 m

Especial Cuarto de ESO

8 – Empezamos las obras por el tejado

<u>1ª Forma de resolución:</u>

Por Pitágoras.



Consideramos tres triángulos rectángulos y aplicamos Pitágoras:

$21^2 = x^2 + y^2$

$x^2 = 7^2 + h^2$ $\quad\Big\}\quad$ $h^2 = x^2 - 7^2$

$y^2 = h^2 + 14^2$ $\qquad\qquad$ $y^2 = x^2 - 7^2 + 14^2$

Así quedan:

$$\begin{cases} 441 = x^2 + y^2 \\ y^2 = x^2 + 147 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 441 = x^2 + y^2 \\ -147 = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$441 - 147 = 2x^2$$

$x^2 = 147$ luego $x = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$

$y^2 = 147 + 147$ de donde $y = 7\sqrt{6}$

$h^2 = x^2 - 49 = 147 - 49 = 98$ por lo que $h = 7\sqrt{2}$

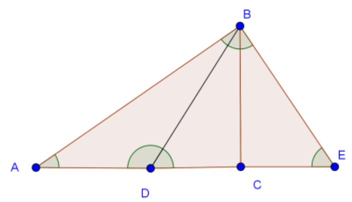
La superficie del tejado la forman dos rectángulos de lados (x, 21) e (y,21)

La suma de áreas es $21 \cdot 7\sqrt{3} + 21 \cdot 7\sqrt{6} = 147\sqrt{3} + 147\sqrt{6} = 147(\sqrt{3} + \sqrt{6})$

El coste será: $147(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot 42 = 6174\ (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx \mathbf{25\,816,83\ euros}$

<u>2ª Forma de resolución:</u>

Por semejanza de triángulos.



El triángulo ABC es semejante al triángulo DBC

Siendo los ángulos$\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$ y los ángulos

$$\widehat{ABC} = \widehat{CDB}$$

Por tanto se tiene que: $\frac{h}{7} = \frac{14}{h}$ $h^2 = 98$ $h = 7\sqrt{2}$

Aplicando Pitátoras al triángulo DBC tenemos $DB^2 = h^2 + 14^2 = 14^2 + (7\sqrt{2})^2 = 6 \cdot 7^2$

Se tiene $y = DB = 7\sqrt{6}$

Aplicando Pitátoras al triángulo ABC tenemos $AB^2 = h^2 + 7^2 = 7^2 + (7\sqrt{2})^2 = 3 \cdot 7^2$

Se tiene $x = DB = 7\sqrt{3}$

De igual manera que en la forma de resolución anterior se obtiene que:

El coste será: $147(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot 42 = 6174\ (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx \mathbf{25\,816,83\ euros}$

10 – El cartero y la rubia

Llamamos A a la edad de la primera hija, B a la edad de la segunda hija y C a la edad de la tercera hija.

Descomponemos 36 en producto de factores primos:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

Estudiamos los posibles valores de los tres factores:

A	B	C	Suma
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	**13**
2	2	9	**13**
2	3	6	11
3	3	4	10

La única suma que se repite es 13 por lo que se necesita un dato más. Luego las edades podrían ser inicialmente 1,6 y 6 o 2, 2 y 9 siendo mellizas las dos mayores o las dos menores. Como habla de la mayor, la única solución posible es que **las edades sean 2, 2 y 9 años** siendo mellizas las dos pequeñas.