TTM, preparación olímpica III, desigualdades

Adrián Rodrigo Escudero

25 de noviembre de 2016

Teoría

Teorema (desigualdad de las medias)**.** *Sean* $a_1, \ldots, a_n > 0$*, entonces:*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Y la igualdad se da si y solo si $a_1 = \ldots = a_n$*.*

Teorema (desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ *números reales, entonces:*

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2$$

Y la igualdad se da si y solo si $a_ib_j = a_jb_i$ *para todos* $1 \leq i, j \leq n$*.*

Nota. Un truco para memorizar esta desigualdad es considerar los vectores (de n dimensiones) $\vec{u} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{v} = (b_1, \ldots, b_n)$ y la fórmula del producto escalar:

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Como el valor absoluto del coseno es menor o igual que 1, obtenemos que $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$. La condición de igualdad se traduce en que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean proporcionales.

Nota. Normalmente en los problemas de desigualdades se espera que se indique cuándo se da la igualdad, aunque no esté explícitamente preguntado en el enunciado.

Ejemplo 1 (fase local olimpiada matemática española 2007)**.** Hallar todas las soluciones reales de la ecuación:

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$$

Solución. En el enunciado de este problema no aparece ninguna desigualdad, sino una ecuación con tres incógnitas. En principio podemos pensar que va a haber infinitas soluciones, pero el problema tiene truco, ya que es una desigualdad encubierta.

Aplicamos la desigualdad de las medias:

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}}$$

Utilizando de nuevo la desigualdad de las medias, vemos que $x^2+1 \geq 2|x| \geq 2x$; y que la igualdad $x^2+1 = 2x$ se cumple si y solo si $x = 1$. Análogamente $y^2+1 \geq 2y$, $z^2+1 \geq 2z$ con igualdad si y solo si $y = z = 1$. Luego:

$$3 \cdot \sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{3^{-3}} = 1$$

Hemos demostrado que el miembro de la izquierda de nuestra ecuación es mayor que el de la derecha, salvo en el caso $x = y = z = 1$, que es posible que ambos sean iguales. Una simple cuenta nos asegura que, en efecto, $x = y = z = 1$ es solución de la ecuación. □

Ejemplo 2. Sean $a, b, c > 0$ tales que $a + b + c = 1$. Probar que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

Solución. Queremos quitar la condición $a + b + c = 1$. Para ello escribimos la desigualdad como:

$$\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \geq 9$$

Si multiplicáramos a, b, c por el mismo número, por ejemplo 2, el miembro de la izquierda no cambiaría, pero la condición se convertiría en $a + b + c = 2$. Es decir, nos podemos olvidar de la condición.

La desigualdad de las medias nos dice que $b/a + a/b \geq 2$; con igualdad si y solo si $b/a = a/b$, es decir, $a = b$. Análogamente $c/b + b/c \geq 2$, y $a/c + c/a \geq 2$, con igualdad si y solo si $b = c = a$. Juntando las tres desigualdades vemos que hemos probado lo que nos pedían, y que la igualdad se cumple si y solo si $a = b = c = 1/3$. □

Ejemplo 3 (desigualdad de Nesbitt)**.** Sean $a, b, c > 0$, prueba que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Solución. Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz con:

$$\vec{u} = \left(\sqrt{b+c}, \sqrt{c+a}, \sqrt{a+b}\right) \qquad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}, \frac{1}{\sqrt{c+a}}, \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)$$

Obteniendo:

$$(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9$$

Simplificando obtenemos la desigualdad pedida. La igualdad se alcanza si y solo si $b+c = c+a = a+b$, es decir, $a = b = c$. □

Problemas

Problema 1 (fase local olimpiada matemática española 2015)**.** Demuestra que:

$$(ax+by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a+b=1$, $a, b \geq 0$. ¿En qué casos se da la igualdad?

Problema 2 (fase local olimpiada matemática española 2015)**.** Halla todas las ternas de reales positivos (x, y, z) que cumplan el sistema:

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1 \\ 2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1 \\ 2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1 \end{cases}$$

Problema 3 (fase local olimpiada matemática española 2015)**.** Sean x, y, z reales positivos tales que $x+y+z=3$. Halla el valor máximo alcanzado por:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6}$$

¿Para qué valores de x, y, z se alcanza dicho máximo?

Problema 4 (olimpiada matemática canadiense 2002)**.** Prueba que para todos números reales positivos a, b, y c:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$$

Y determina cuándo se cumple la igualdad.

Problema 5 (olimpiada matemática española 2007)**.** Sea $a \neq 1$ un número real positivo y n un entero mayor que 1. Demostrar que:

$$n^2 < \frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}$$

Soluciones

Solución del problema 1. Reescribimos la desigualdad de manera que podamos olvidarnos de la condición $a + b = 1$:

$$(ax + by)^2 \leq (ax^2 + by^2)(a + b)$$

Operando nos queda que debemos probar la siguiente desigualdad:

$$2abxy \leq ab(x^2 + y^2)$$

Que es consecuencia de la desigualdad de las medias entre x y y. La igualdad se cumple o bien si $x = y$, o bien si $ab = 0$ (es decir, $a = 0$ o $b = 0$). $\square$

Solución del problema 2. Por la desigualdad de las medias:

$$x^2 + (x + 1) \geq 2x\sqrt{x + 1}$$

Con igualdad si y solo si $x^2 = x+1$, es decir, $x = (1+\sqrt{5})/2$. Y análogamente para y y z. Sumando las tres desigualdades obtenemos:

$$2x\sqrt{x + 1} - x(x + 1) + 2y\sqrt{y + 1} - y(y + 1) + 2z\sqrt{z + 1} - z(z + 1) \leq 3$$

Si el sistema del enunciado se cumple, necesariamente en esta desigualdad se alcanza la igualdad. Luego la única terna que puede cumplir el sistema es $x = y = z = (1 + \sqrt{5})/2$. Es un mero cálculo comprobar que dicha terna sí es solución del sistema. $\square$

Solución del problema 3. Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz con:

$$\vec{u} = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y + 1}, \sqrt{z + 2}\right) \qquad \vec{v} = \left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$$

Obteniendo:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y + 2} + \sqrt{3z + 6} \leq \sqrt{x + y + 1 + z + 2} \cdot \sqrt{1 + 2 + 3} = 6$$

La igualdad se da cuando ambos vectores son proporcionales, es decir, cuando son iguales, ya que tienen el mismo módulo. Luego el máximo se alcanza si y solo si $x = y = z = 1$, y su valor es 6. $\square$

Solución del problema 4. Por la desigualdad de las medias:

$$\frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3a \qquad \frac{b^3}{ca} + c + a \geq 3b \qquad \frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3c$$

Sumando las tres desigualdades obtenemos la que nos piden. La igualdad se cumple si y solo si $a = b = c$. $\square$

Solución del problema 5. Llamamos $b = \sqrt{a}$ y operamos:

$$\frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2} = \frac{(b^n - b^{-n})^2}{(b - b^{-1})^2}$$

Además:

$$b^n - b^{-n} = (b - b^{-1})(b^{n-1} + b^{n-3} + \ldots + b^{-n+1})$$

Con lo que la desigualdad que tenemos que probar es:

$$b^{n-1} + b^{n-3} + \ldots + b^{-n+1} > n$$

Que es consecuencia inmediata de la desigualdad de las medias. $\square$