Preparación olímpica III: geometría

Teoría

Adrián Rodrigo Escudero

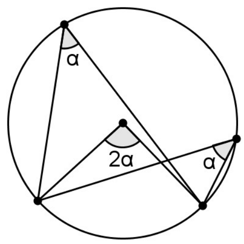
20 de noviembre de 2015

Los problemas de geometría, como el resto de problemas de olimpiada, están pensados para que no sean necesarios grandes conocimientos para su resolución, sino mucho ingenio. Es por ello que no hay ninguna teoría cuyo estudio garantice resolverlos todos. La preparación más eficaz es la propia resolución de problemas. Esto no quiere decir que no haya teoremas útiles que aprender, pero en una primera instancia lo más importante es comprender bien las matemáticas y tener las ideas claras.

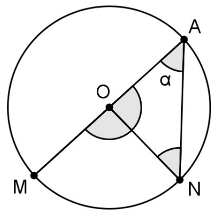
De todas formas, hay ciertas propiedades que no son para nada evidentes y que resultan indispensables. En este texto las presentamos recuadradas, ya que conviene memorizarlas; afortunadamente es probable que las conozcas. También incluimos sus demostraciones y algunas de sus consecuencias, con el objetivo de que ilustren el método de razonamiento matemático; así en este caso lo importante es entenderlas.

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

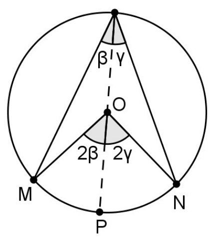
Todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

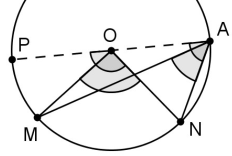


Demostración



Llamemos A, M, N a los vértices del ángulo, y O al centro de la circunferencia. Comenzamos analizando el caso particular en el que un lado pasa por O. El triángulo OAN es isósceles, ya que OA y ON son radios; luego ONA = OAN = α. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180º, deducimos que AON = 180º – 2α; y por tanto MON = 2α.

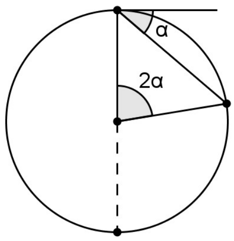




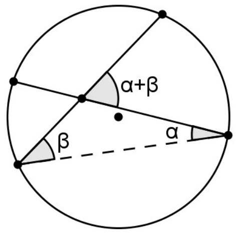
Ahora distinguimos dos casos. Primero, si O está en el interior del ángulo inscrito (si el ángulo central es mayor o igual que 180º esto pasa siempre), podemos considerarlo como suma de dos ángulos inscritos con el lado común pasando por el centro, y ya hemos probado que cada uno de ellos es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. Y segundo, si el centro cae fuera del ángulo inscrito, hacemos un razonamiento análogo pero dividiendo el ángulo en resta (en lugar de suma) de dos ángulos.

De este resultado se deducen los siguientes:

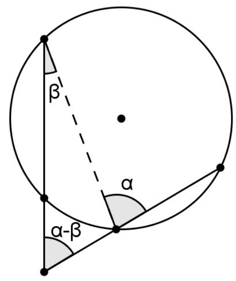
Un ángulo semiinscrito es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.



Un ángulo interior es la semisuma de los ángulos centrales que abarcan los mismos arcos.



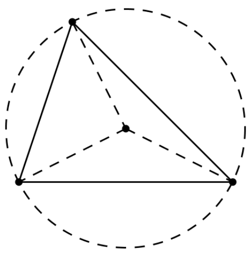
Un ángulo exterior es la semidiferencia de los ángulos centrales que abarcan los mimos arcos.



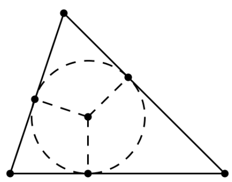
CENTROS DEL TRIÁNGULO

Consideramos un triángulo de vértices A, B, C.

El **circuncentro** es el punto que equidista de los vértices. Por tanto se puede trazar una circunferencia que pase por los tres vértices tomándolo como centro.

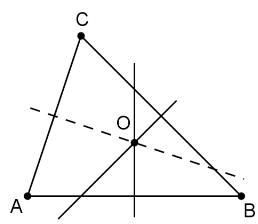


El **incentro** es el punto que equidista de los lados. Si lo elegimos como centro, podemos dibujar una circunferencia tangente a los tres lados.



Demostración

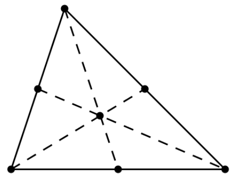
Veamos que la definición de circuncentro es correcta, es decir, que existe un único punto que cumple la propiedad de estar a igual distancia de los tres vértices del triángulo. Tal punto debe pertenecer simultáneamente a la mediatriz de cada lado; luego ya vemos que solo hay un candidato a circuncentro y su existencia se reduce a que las tres mediatrices pasen por el mismo punto. Consideramos el punto de corte de la mediatriz de AB con la mediatriz de BC; llamémosle O. Por definición, se cumple que OA = OB



y OB = OC; luego OA = OB = OC, es decir, O equidista de los tres vértices, que es lo que queríamos probar.

Para el incentro hacemos el mismo razonamiento, pero en este caso con las bisectrices.

La mediana de un vértice es el segmento que une dicho vértice con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo concurren en un mismo punto, llamado **baricentro**. La distancia de cada vértice al baricentro es dos tercios de la longitud de su mediana.



Demostración

Aunque la geometría analítica suele ser farragosa y poco efectiva en problemas de olimpiadas, cuando se trata de puntos medios puede ser muy eficaz. Sean $(x_A, y_A),(x_B, y_B),(x_C, y_C)$ las coordenadas de A, B, C. Veamos que las tres medianas pasan por el punto:

$$G\equiv\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

El punto medio de BC es:

$$M\equiv\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)$$

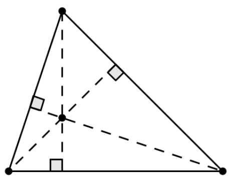
Luego:

$$AM=\left(\frac{x_B+x_C-2x_A}{2},\frac{y_B+y_C-2y_A}{2}\right)$$

$$AG=\left(\frac{x_B+x_C-2x_A}{3},\frac{y_B+y_C-2y_A}{3}\right)$$

Por tanto AG es dos tercios de AM; y en particular, G pertenece al segmento AM. Por la simetría de las ecuaciones, lo mismo sucede con los puntos B y C.

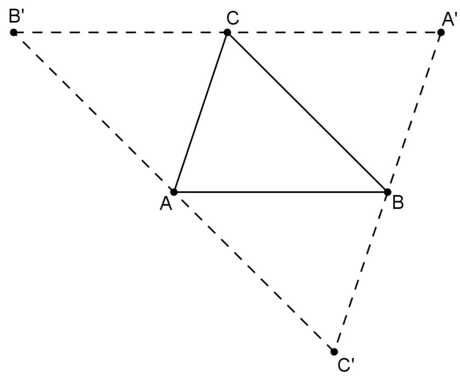
Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto, el **ortocentro**.



Demostración

La manera más fácil de probarlo es utilizar el teorema de Ceva (que veremos más adelante en un ejercicio), ya que aunque exige de conocimientos avanzados es un camino en el que uno pensaría de manera natural. Ahora vamos a recurrir a una "idea feliz".

Por cada vértice trazamos una recta paralela a su lado opuesto; de esta manera obtenemos el triángulo A'B'C' que se ve en el dibujo. Por construcción, el cuadrilátero ABCB' es un paralelogramo, luego B'C = AB. Análogamente, CA' = AB. Por tanto, C es el punto medio de B'A', y la altura del vértice C del primer triángulo es la mediatriz del lado B'A' del segundo triángulo. Igualmente sucede con los otros dos vértices, con lo que la concurrencia de las alturas del triángulo ABC se deduce de la concurrencia de las mediatrices del triángulo A'B'C'.

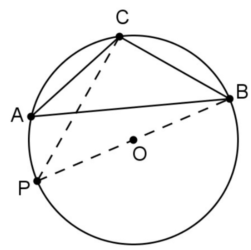


FÓRMULAS EN EL TRIÁNGULO

Sea R el radio del circuncírculo del triángulo ABC.

Teorema del seno:	Teorema del coseno:
$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}=2R$	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(A)$

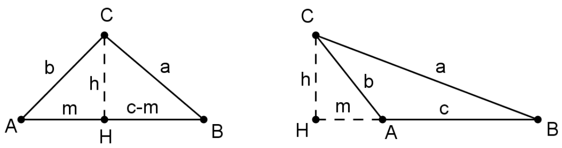
Demostración del teorema del seno



Sea O el centro de la circunferencia circunscrita, prolongamos el segmento BO hasta cortar de nuevo a la circunferencia en P. El ángulo BPC vale lo mismo que el A, por ser ambos ángulos inscritos (si el ángulo A es obtuso, entonces BPC es su complementario, cuyo seno tiene el mismo valor). El ángulo BCP es recto, ya que subtiende al diámetro BP. Por consiguiente: sin(A) = BC / BP = a / 2R. Por simetría, se ha de cumplir la misma relación con b y c.

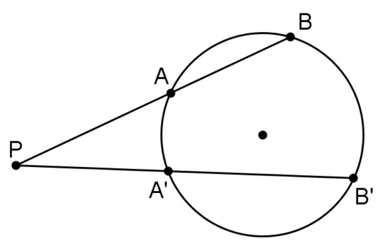
Demostración del teorema del coseno

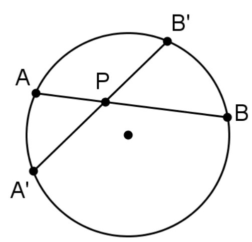
Veamos el caso en el que el ángulo A es agudo. Podemos suponer que el ángulo B es también agudo (ya que si no intercambiamos los nombres de B y C). Sea h la altura desde el vértice C, y H su pie; y llamamos m al segmento AH. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos ACH y BCH obtenemos: $a^2 = h^2 + (c-m)^2$, $b^2 = h^2 + m^2$. Despejando h^2 y simplificando nos queda: $a^2 = b^2 + c^2 – 2cm$. Por último observamos que m = b cos(A). El caso de A obtuso es similar.



POTENCIA

Dibujamos una circunferencia y un punto P exterior o interior a ella. Trazamos una recta que pase por P, y llamamos A y B a sus intersecciones con la circunferencia. El valor PA · PB no depende de la recta elegida. Dicho de otra manera, si A' y B' son los puntos de corte de otra recta que pase por P con la circunferencia, entonces:





PA · PB = PA' · PB'.

En particular, si tomamos la recta que pasa por el centro de la circunferencia vemos que esta cantidad es $(d - r) \cdot (d + r) = d^2 - r^2$, donde d es la distancia del punto al centro de la circunferencia y r su radio.

Demostración

Si reescribimos la fórmula como PA / PB' = PA' / PB, vemos que tiene aspecto de ser la relación de semejanza entre los triángulos PAB' y PA'B. Pero dichos triángulos son claramente semejantes, ya que tienen un ángulo común y PBA' = PB'A por ser inscritos.

Notar que estos argumentos también son válidos si A = B, es decir, si la recta es tangente a la circunferencia.

Finalmente tres simples consejos que conviene no perder de vista a la hora de resolver un problema:

1. Empezar el problema por el final.
2. Recordar que hay que utilizar todas las hipótesis.
3. Hacer un dibujo con regla, escuadra, cartabón y compás.