Preparación olímpica III: geometría

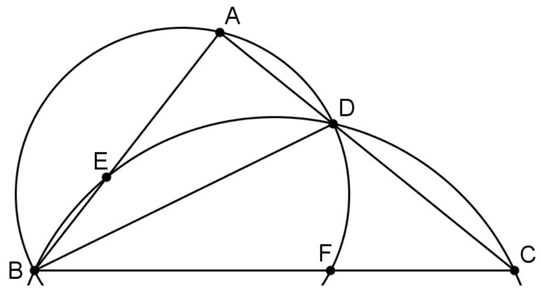
Soluciones

Adrián Rodrigo Escudero

20 de noviembre de 2015

Problema 1 (San Petersburgo 1996)

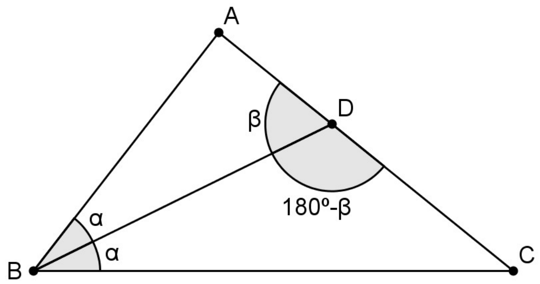
Sea BD la bisectriz del ángulo B en el triángulo ABC. La circunferencia circunscrita del triángulo BDC corta a AB en E, y la del ABD corta a BC en F. Demostrar que AE = CF.



Ayuda: utiliza potencia y el teorema del seno.

Solución

La potencia de A respecto de la circunferencia que pasa por BDC es AE·AB = AD·AC. Análogamente, CF·CB = CD·CA. Juntando ambas expresiones, vemos que tenemos que demostrar que AD·BC = CD·AB, sabiendo que BD es la bisectriz.

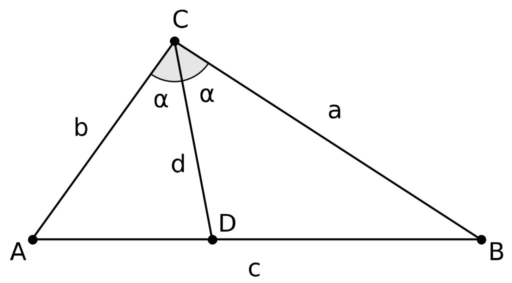


Este resultado se conoce como teorema de la bisectriz. Aplicamos el teorema del seno al triángulo ABD: AB/sen(β) = AD/sen(α); y análogamente con el triángulo BDC: BC/sen(180º-β) = CD/sen(α). Despejando los senos, ya que sen(180º-β) = sen(β), obtenemos el resultado.

Problema 2 (fase local OME 2003)

Dado un triángulo de vértices A, B y C, y con lados de longitud a = BC, b = AC y c = AB, llamemos D al punto de intersección del lado AB con la bisectriz del ángulo C. Demuestra que:

$$2ab\cos(C/2) = CD(a+b)$$



Ayuda: calcula el área del triángulo.

Solución

Llamemos d = CD y α = C/2. El área del triángulo ABC es la suma de las áreas de los triángulos ACD y BCD:

$$\frac{1}{2}ab\sin(2\alpha)=\frac{1}{2}bd\sin(\alpha)+\frac{1}{2}ad\sin(\alpha)$$

Sustituyendo sin(2α) = 2 sin(α) cos(α) y multiplicando por 2 y diviendo entre sin(α) obtenemos el resultado:

$$2ab\cos(\alpha)=bd+ad=d(a+b)$$

Problema 3

Sea S la superficie de un triángulo de lados a, b y c. Probar que:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Ayuda: intenta quedarte con el mínimo de variables, escribiendo unas en función de las demás; ten también en cuenta la desigualdad de las medias (que se cumple si y solo si a = b):

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$$

Solución

Despejamos c y S en función de a, b y el ángulo C:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(C) \qquad 2S=ab\sin(C)$$

Con lo que vemos que la desigualdad es equivalente a:

$$a^2+b^2\geqslant ab(\cos(C)+\sqrt{3}\sin(C))$$

Pero:

$$\sin(C+30^o)=\sin(C)\cos(30^o)+\cos(C)\sin(30^o)=(\cos(C)+\sqrt{3}\sin(C))/2$$

Luego nos queda por probar que:

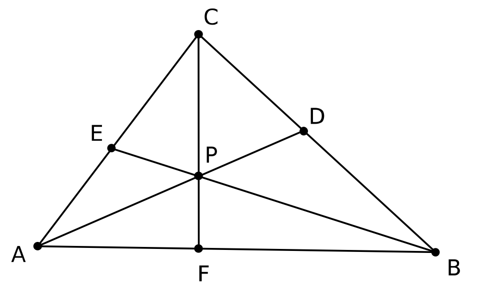
$$a^2+b^2\geqslant 2ab\sin(C+30^o)$$

La desigualdad de las medias nos dice que $a^2+b^2\geqslant 2ab$ con igualdad si y solo si a = b. Y $1\geqslant\sin(C+30^o)$ con igualdad si y solo si C = 60º. Por tanto hemos probado la desigualdad, y la igualdad se da cuando el triángulo es equilátero.

Problema 4 (teorema de Ceva)

Dado un triángulo ABC y tres cevianas (rectas que pasan por un vértice y cortan al lado opuesto, y son distintas de los lados) tales que una pasa por el vértice A y corta al lado opuesto en D, otra pasa por el vértice B y corta al lado opuesto en E, y la última pasa por el vértice C y corta al lado opuesto en F. Demostrar que si las tres cevianas concurren en un punto, entonces AF · BD · CE

= FB · DC · EA.



Ayuda: Aplica seis veces el teorema del seno.

Solución

Aplicando el teorema del seno a los triángulos APF y BPF obtenemos:

$$\frac{AF}{\sin(\widehat{APF})}=\frac{AP}{\sin(\widehat{AFP})} \qquad \frac{BP}{\sin(\widehat{BFP})}=\frac{BF}{\sin(\widehat{BPF})}$$

Análogamente con PBD y PCD:

$$\frac{BD}{\sin(\widehat{BPD})}=\frac{PB}{\sin(\widehat{PDB})} \qquad \frac{PC}{\sin(\widehat{PDC})}=\frac{CD}{\sin(\widehat{CPD})}$$

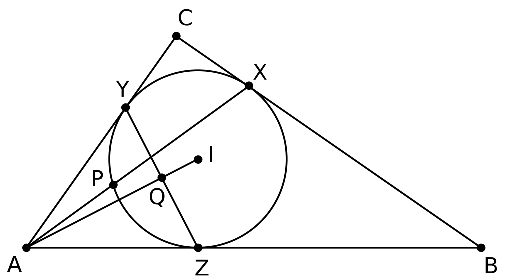
Y con PCE y APE:

$$\frac{CE}{\sin(\widehat{CPE})}=\frac{PC}{\sin(\widehat{PEC})} \qquad \frac{AP}{\sin(\widehat{AEP})}=\frac{AE}{\sin(\widehat{APE})}$$

Ahora basta con multiplicar las seis ecuaciones. En efecto, vemos que en la igualdad resultante los términos AP, BP y CP aparecen en ambos miembros, luego los despejamos. Lo mismo sucede con sen(APF) = sen(CPD), sen(BPD) = sen(APE) y sen(CPE) = sen(BPF). Finalmente despejamos los senos de los ángulos suplementarios: sen(AFP) = sen(BFP), sen(PDB) = sen(PDC) y sen(PEC) = sen(AEP).

Problema 5 (olimpíada iberoamericana de matemática 1990)

En un triángulo ABC, sea I el incentro y sean X, Y y Z los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA y AB respectivamente. La recta AX corta al incírculo nuevamente en P, y la recta AI corta a YZ en Q. Demostrar que X, I, Q y P están sobre una misma circunferencia.

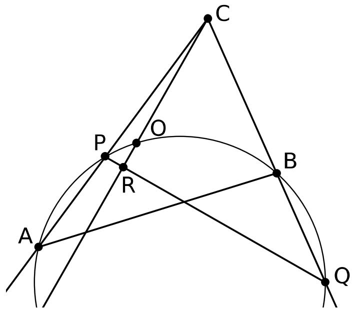


Solución

Por la propiedad de la potencia de un punto (el A) respecto a una circunferencia (la que pasa por X, I y P), basta ver que: $AP\cdot AX=AQ\cdot AI$. Pero $AP\cdot AX$ es la potencia de A respecto al incírculo, luego $AP\cdot AX=AY^2$. Finalmente, el triángulo AYI es rectángulo, e YQ es una de sus alturas, por lo que la igualdad $AQ\cdot AI=AY^2$ no es más que el teorema del cateto.

Problema 6 (Inglaterra 1996)

Sea ABC un triángulo acutángulo y O su circuncentro. Sea S la circunferencia que pasa por A, B y O. Las rectas CA y CB cortan a S otra vez en P y Q. Demostrar que CO es perpendicular a PQ.



Solución

Tenemos que probar que los ángulos RCQ y CQR son complementarios. Sabemos que O es el circuncentro de ABC, y esto es equivalente a las siguientes igualdades entre ángulos: ACO=CAO, ABO=BAO y BCO=CBO. Teniendo además en cuenta que la suma de esos seis ángulos es 180º, vemos que RCQ es el complementario de CAB. Finalmente observamos que los ángulos CAB y CQR son iguales ya que ambos son inscritos y abarcan el mismo arco de la circunferencia S.