MATEMÁTICAS VISUALES, PRUEBAS SIN PALABRAS

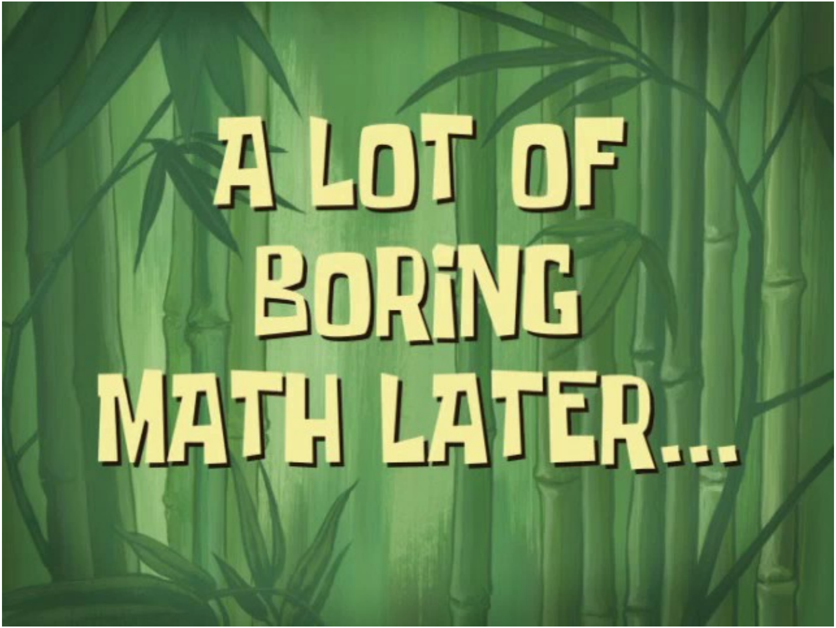
Pedro J. Miana
Departamento de Matemáticas & I.U.M.A.
Universidad de Zaragoza

Taller de Talento Matemático, 5 de febrero de 2016

Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones Universidad Zaragoza

Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza 1542


A LOT OF
BORING
MATH LATER...

MATEMÁTICAS VISUALES, PRUEBAS SIN PALABRAS

Pedro J. Miana
Departamento de Matemáticas & I.U.M.A.
Universidad de Zaragoza

Taller de Talento Matemático, 5 de febrero de 2016

Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones Universidad Zaragoza

Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza 1542

Sín título, 2001, Juan Genovés

1. Razón: Lenguaje matemático visual

- Conjuntos abiertos, cerrados, fronteras y estrellados.

1. Razón: Lenguaje matemático visual

- Conjuntos abiertos, cerrados, fronteras y estrellados.
- La Banda de Möebius; la Botella de Klein.

1. Razón: Lenguaje matemático visual

- Conjuntos abiertos, cerrados, fronteras y estrellados.
- La Banda de Möebius; la Botella de Klein.
- El Queso de Cantor; la Alfombra de Sierpinski; la Esponja de Menger; el Copo de Nieve de Koch.

1. Razón: Lenguaje matemático visual

- Conjuntos abiertos, cerrados, fronteras y estrellados.
- La Banda de Möebius; la Botella de Klein.
- El Queso de Cantor; la Alfombra de Sierpinski; la Esponja de Menger; el Copo de Nieve de Koch.
- Teorema de los Cuatro Colores; el problema de los puentes de Könisberg.

1. Razón: Lenguaje matemático visual

- Conjuntos abiertos, cerrados, fronteras y estrellados.
- La Banda de Möebius; la Botella de Klein.
- El Queso de Cantor; la Alfombra de Sierpinski; la Esponja de Menger; el Copo de Nieve de Koch.
- Teorema de los Cuatro Colores; el problema de los puentes de Könisberg.
- Principio del Palomar; la Conjetura de la Aguja de Kakeya.

1. Razón: Lenguaje matemático visual

- Conjuntos abiertos, cerrados, fronteras y estrellados.
- La Banda de Möebius; la Botella de Klein.
- El Queso de Cantor; la Alfombra de Sierpinski; la Esponja de Menger; el Copo de Nieve de Koch.
- Teorema de los Cuatro Colores; el problema de los puentes de Könisberg.
- Principio del Palomar; la Conjetura de la Aguja de Kakeya.
- Teorema de la Bola (o del Perro) Peluda; el Teorema de los Infinitos Monos.

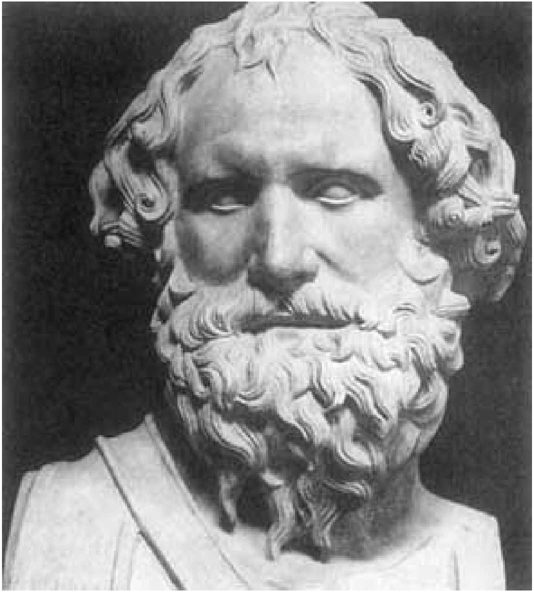
1. Razón: Lenguaje matemático visual

- Conjuntos abiertos, cerrados, fronteras y estrellados.
- La Banda de Möebius; la Botella de Klein.
- El Queso de Cantor; la Alfombra de Sierpinski; la Esponja de Menger; el Copo de Nieve de Koch.
- Teorema de los Cuatro Colores; el problema de los puentes de Könisberg.
- Principio del Palomar; la Conjetura de la Aguja de Kakeya.
- Teorema de la Bola (o del Perro) Peluda; el Teorema de los Infinitos Monos.
- La regla del Sandwich; el Teorema del Bocadillo de Jamón (el Teorema de la Clara/Yema del Huevo); el Teorema del Pollo Picante.

1. Razón: Lenguaje matemático visual

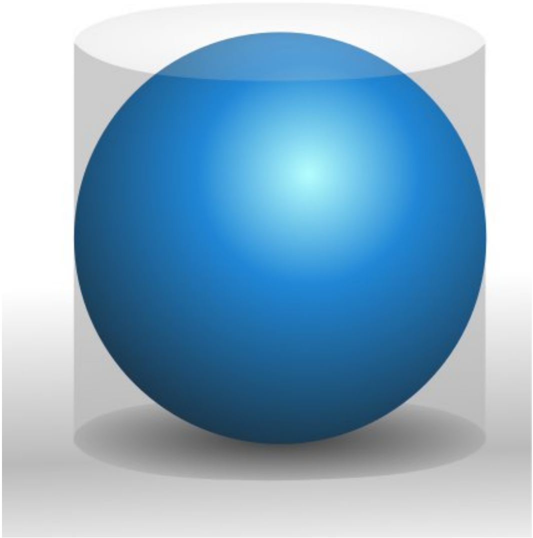
- Conjuntos abiertos, cerrados, fronteras y estrellados.
- La Banda de Möebius; la Botella de Klein.
- El Queso de Cantor; la Alfombra de Sierpinski; la Esponja de Menger; el Copo de Nieve de Koch.
- Teorema de los Cuatro Colores; el problema de los puentes de Könisberg.
- Principio del Palomar; la Conjetura de la Aguja de Kakeya.
- Teorema de la Bola (o del Perro) Peluda; el Teorema de los Infinitos Monos.
- La regla del Sandwich; el Teorema del Bocadillo de Jamón (el Teorema de la Clara/Yema del Huevo); el Teorema del Pollo Picante.
- La Conjetura de los Diez Martinis.

2. Razón: Epitafios matemáticos



Arquímedes de Siracusa (287 a. C. - 212 a. C.)

2. Razón: Epitafios matemáticos

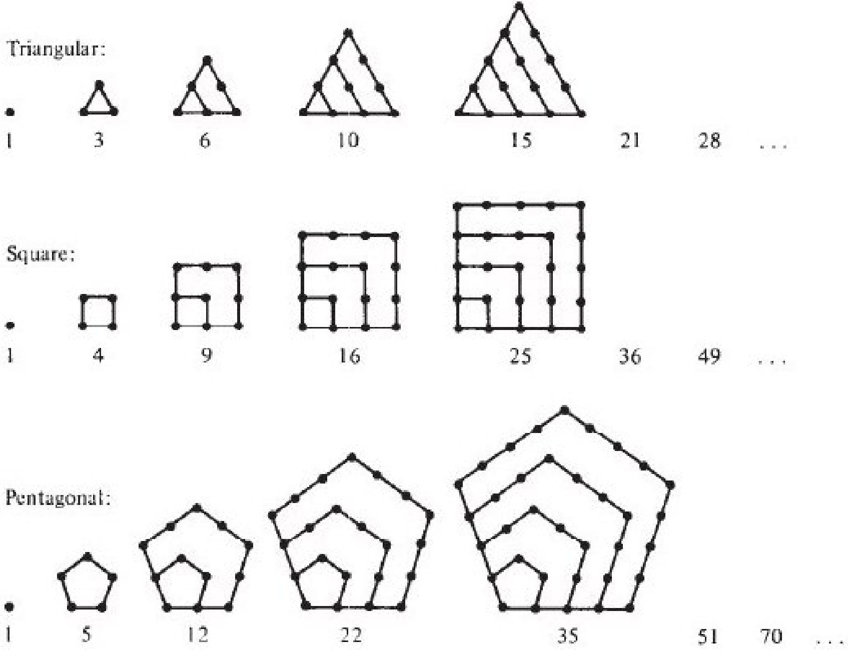


$2:3$

En el origen, los números

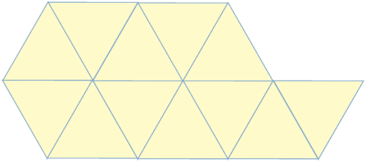
1, 2, 3, 4, 5,

6, 7, 8, 9, 0

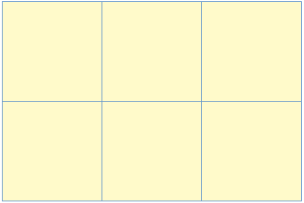


Introduction to Analytic Theory of Numbers. Tom M. Apostol

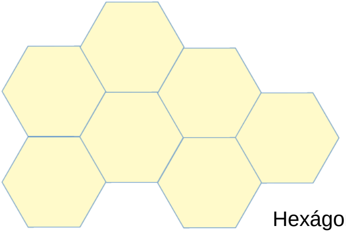
TESELACIONES (REGULARES)



Triángulos equiláteros



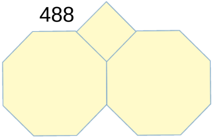
Cuadrados



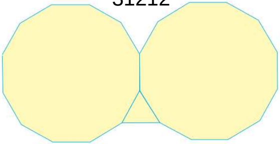
Hexágonos

TESELACIONES (SEMI-REGULARES)

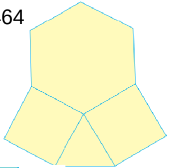
488



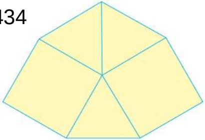
31212



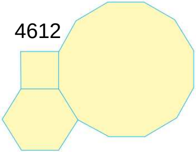
3464



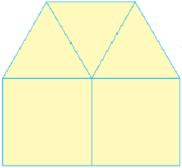
33434

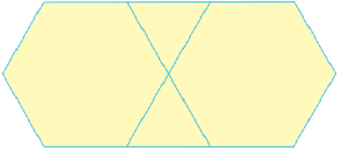


4612

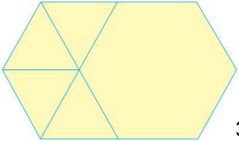


33344



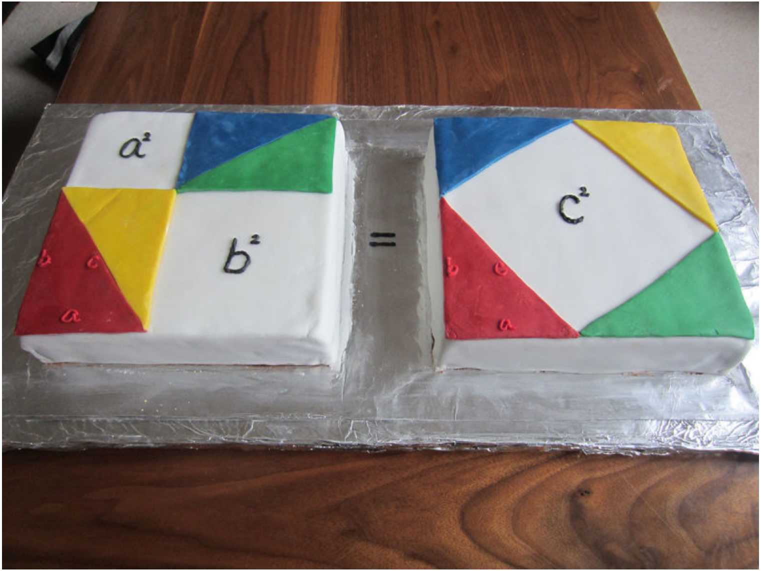


3636

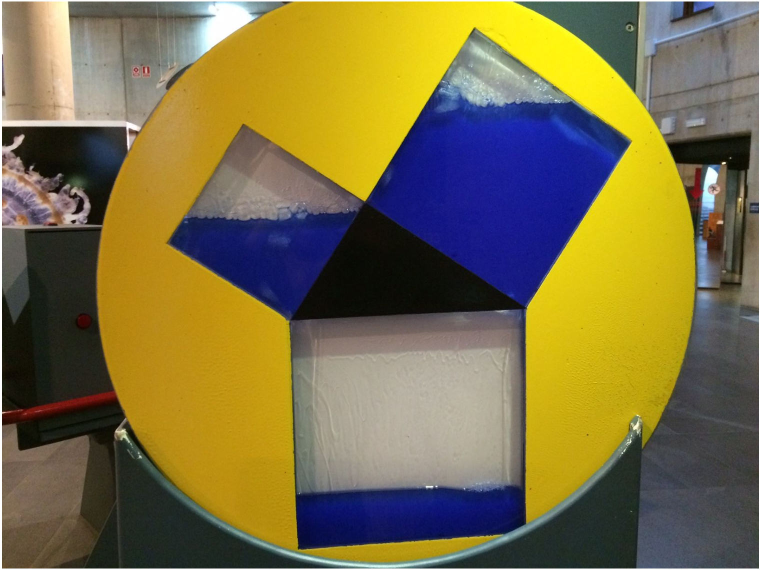


33336

Y surgieron los Teoremas...



Tarta por Emiko Dupont. Foto: Universidad de Bath. http://es.gizmodo.com/



Museo de las Ciencias y del Universo, La Laguna.

...mostrando hermosas fórmulas...

http://www.matematicasdigitales.com/graffitis-matematicos/

...mostrando hermosas fórmulas...

http://www.matematicasdigitales.com/graffitis-matematicos/

9 símbolos= 5 números + 4 operaciones.

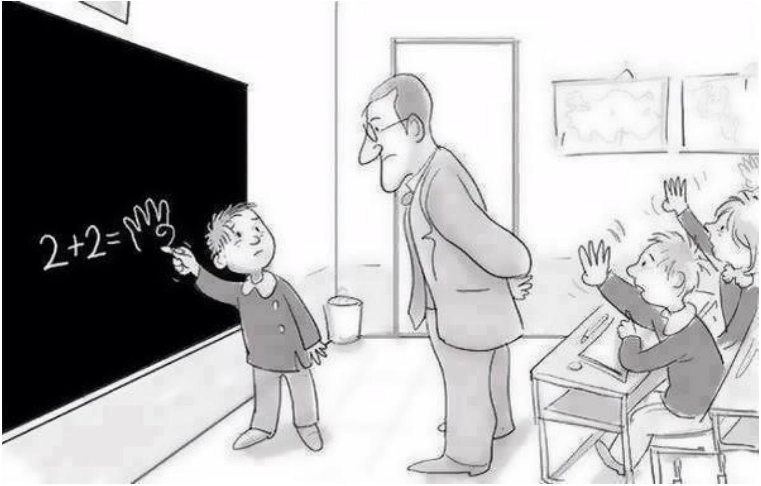
Belleza matemática

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

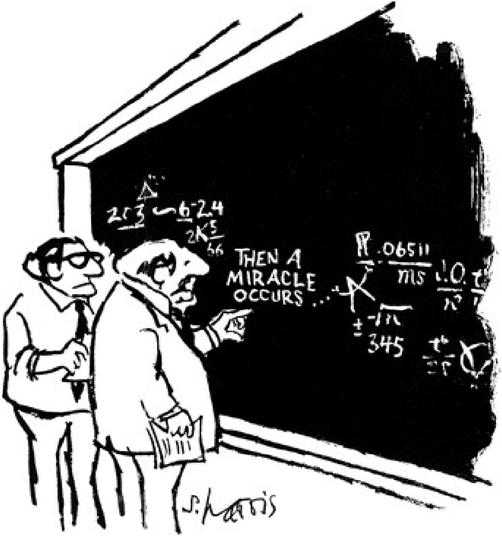
El binomio de Newton es tan bello como la Venus de Milo. Lo que hay es poca gente que se dé cuenta de ello.

El viento, afuera; Fernando Pessoa.

Algunas resultados visuales



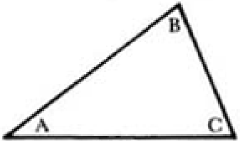
Algunas resultados visuales

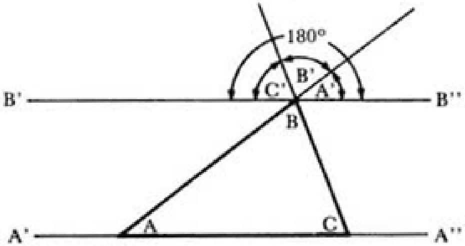


"I think you should be more explicit here in step two."

Suma de los ángulos de un triángulo plano

Suma de los ángulos de un triángulo plano





La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = ??$$

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = ??$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

La suma de los primeros números naturales

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + +95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 5050$$

La suma de los primeros números naturales

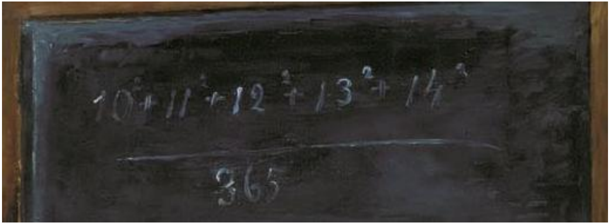
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + +95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 5050$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

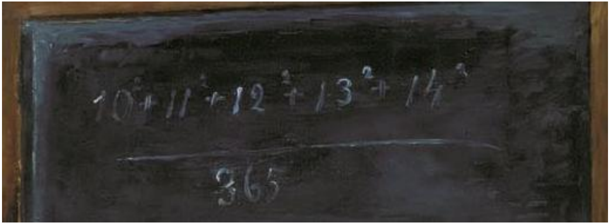
365 días y el año 2016

Aritmética mental en la escuela pública de S.A. Rachimsky.
Nikolai Bogdanov-Belsky (1868-1945)

365 días y el año 2016



365 días y el año 2016



$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

365 días y el año 2016

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

365 días y el año 2016

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 =$$

365 días y el año 2016

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 =$$

$$a = 12, \qquad (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = 5a^2 + 10,$$

365 días y el año 2016

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 =$$

$$a = 12, \qquad (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = 5a^2 + 10,$$

$$= 5 \cdot (12)^2 + 10 = 5 \cdot 144 + 10 = 720 + 10 = 730 = 2 \cdot 365.$$

365 días y el año 2016

Todavía es más...

365 días y el año 2016

Todavía es más...

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

365 días y el año 2016

Todavía es más...

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

¿Es la única sucesión así?:

365 días y el año 2016

Todavía es más...

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

¿Es la única sucesión así?:
No $-2, -1, 0, 1, 2$

Y. Perelman (1882-1942)

365 días y el año 2016

Todavía es más...

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

¿Es la única sucesión así?:
No $-2, -1, 0, 1, 2$

Y. Perelman (1882-1942)

$$2016 = 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prueba. Método de Inducción. $S_1 = 1 = 1(1+1)/2 = 1.$

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prueba. Método de Inducción. $S_1 = 1 = 1(1+1)/2 = 1.$

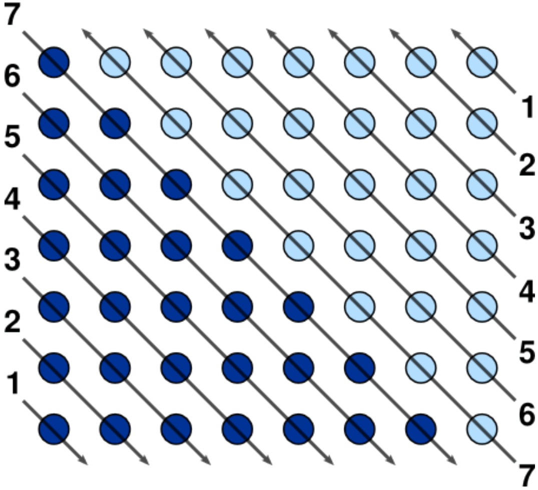
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n + (n+1) = S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



http://divertimentosmatematicos.jimdo.com/divertimentos-1/

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Prueba. Contar con combinatoria:

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Prueba. Contar con combinatoria:

$$\{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Prueba. Contar con combinatoria:

$$\{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

¿ Cuántas parejas podemos realizar?. $(4, 1) = (1, 4)$ y no existen (a, a). Solución $\binom{n+1}{2}$.

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Prueba. Contar con combinatoria:

$$\{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

¿ Cuántas parejas podemos realizar?. $(4,1) = (1,4)$ y no existen (a,a). Solución $\binom{n+1}{2}$.
Por otro lado ¿Cuántas parejas tiene 0?. Solución n.
¿Y cuántas tienen 1?. Solución $n-1$. Reiteramos, tenemos

La suma de los primeros números naturales

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Prueba. Contar con combinatoria:

$$\{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

¿ Cuántas parejas podemos realizar?. $(4, 1) = (1, 4)$ y no existen (a, a). Solución $\binom{n+1}{2}$.
Por otro lado ¿Cuántas parejas tiene 0?. Solución n.
¿Y cuántas tienen 1?. Solución $n - 1$. Reiteramos, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La suma de los primeros números impares

$$R_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

La suma de los primeros números impares

$$R_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Prueba. Directamente...

La suma de los primeros números impares

$$R_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Prueba. Directamente...

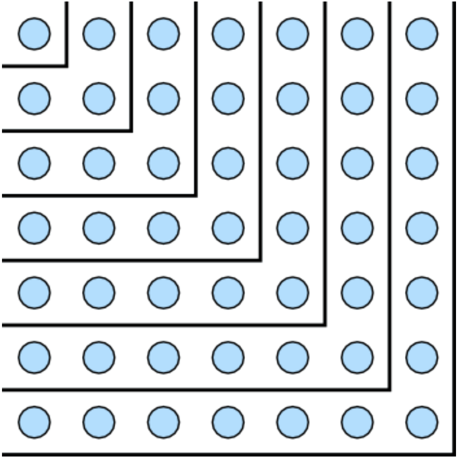
$$\begin{aligned}
R_n &= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = \sum_{j=1}^{n}(2j - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(2j - 1) = 2\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = \\
&= 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.
\end{aligned}$$

La suma de los primeros números impares

$$R_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

La suma de los primeros números impares

$$R_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$



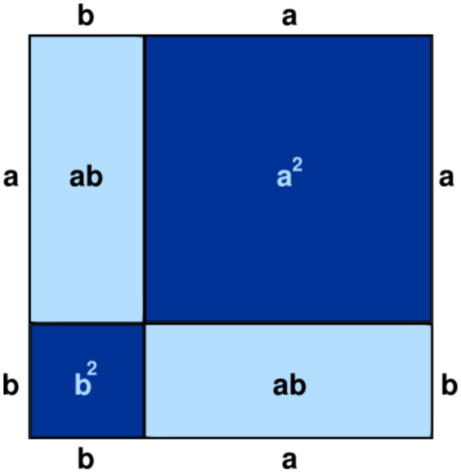
http://divertimentosmatematicos.jimdo.com/divertimentos-1/

Suma al cuadrado

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \\ &= a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Suma al cuadrado

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \\
&= a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$



http://divertimentosmatematicos.jimdo.com/divertimentos-1/

Suma de una progresión geométrica

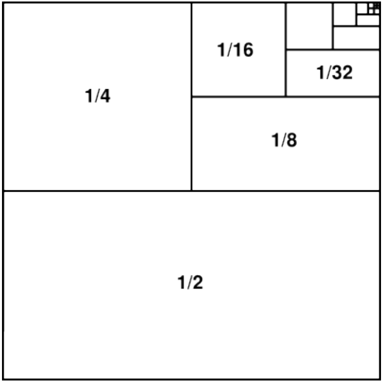
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2^N} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{-\frac{1}{2}} \right) = 1$$

Suma de una progresión geométrica

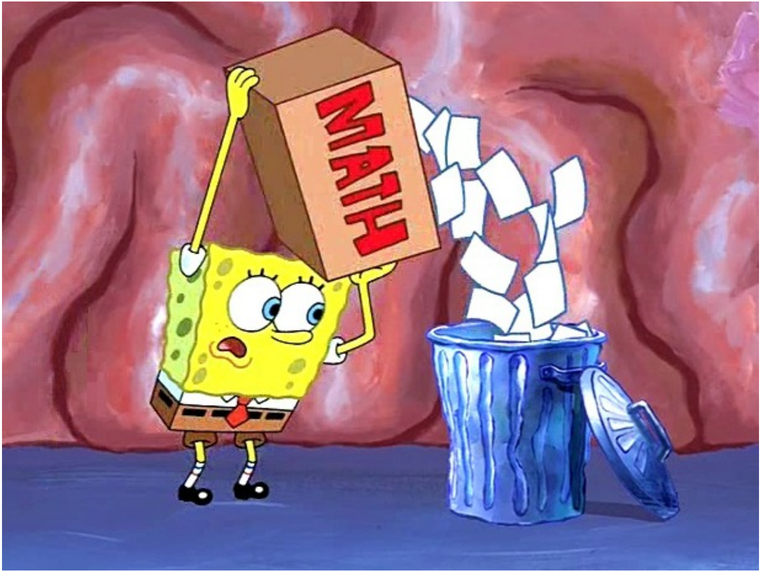
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2^N} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{-\frac{1}{2}} \right) = 1$$

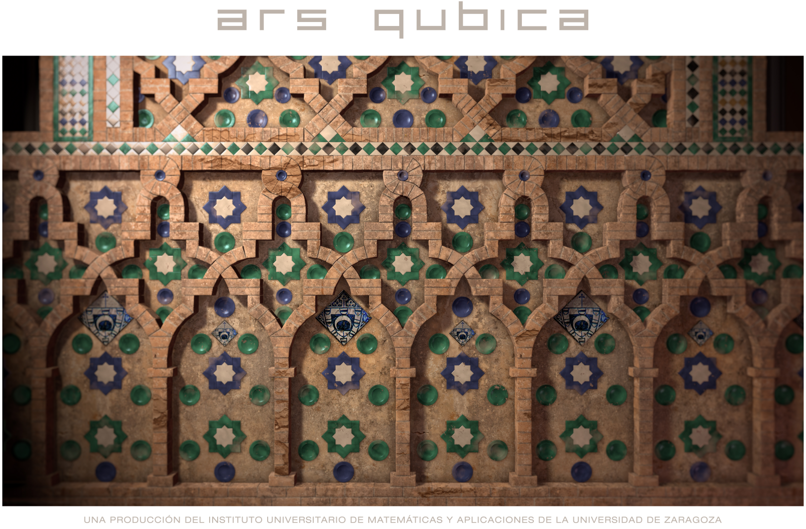


http://divertimentosmatematicos.jimdo.com/divertimentos-1/

Utilidad matemática



Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte



Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

- Proyecto **FECYT**, noviembre de 2014-octubre 2015.

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

- Proyecto **FECYT**, noviembre de 2014-octubre 2015.

Equipo Ars Qubica:

Guionistas, **Luis Rández** y **Fernando Corbalán**
Animación e Imágenes: **Cristóbal Vila**
Redes y comunicación: **Beatriz Rubio**
Dirección del proyecto: **Pedro J. Miana**

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

- Proyecto **FECYT**, noviembre de 2014-octubre 2015.

  Equipo Ars Qubica:

  Guionistas, **Luis Rández** y **Fernando Corbalán**
  Animación e Imágenes: **Cristóbal Vila**
  Redes y comunicación: **Beatriz Rubio**
  Dirección del proyecto: **Pedro J. Miana**
- Matemáticas, y más... prensa, relaciones sociales, marketing...

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

- Proyecto **FECYT**, noviembre de 2014-octubre 2015.
  Equipo Ars Qubica:
  Guionistas, **Luis Rández** y **Fernando Corbalán**
  Animación e Imágenes: **Cristóbal Vila**
  Redes y comunicación: **Beatriz Rubio**
  Dirección del proyecto: **Pedro J. Miana**
- Matemáticas, y más... prensa, relaciones sociales, marketing...
- Presupuesto de 19.150 euros/ 11.000 euros FECYT
  RSME, IUMA, SAPM, Fac. de Ciencias, Activ. Culturales UZ
  CONENTO, RedIUM, Agrup. Astro. Huesca, Risarchers.
  Micromecenazgo de 2100 euros, 52 donaciones (10-100 euros).

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

- Proyecto **FECYT**, noviembre de 2014-octubre 2015.
  Equipo Ars Qubica:
  Guionistas, **Luis Rández** y **Fernando Corbalán**
  Animación e Imágenes: **Cristóbal Vila**
  Redes y comunicación: **Beatriz Rubio**
  Dirección del proyecto: **Pedro J. Miana**
- Matemáticas, y más... prensa, relaciones sociales, marketing...
- Presupuesto de 19.150 euros/ 11.000 euros FECYT
  RSME, IUMA, SAPM, Fac. de Ciencias, Activ. Culturales UZ
  CONENTO, RedIUM, Agrup. Astro. Huesca, Risarchers.
  Micromecenazgo de 2100 euros, 52 donaciones (10-100 euros).
- ... y muchas horas de trabajo.

SINOPSIS

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

SINOPSIS

Las intersecciones de un plano con un cubo dan lugar a 4 tipos de polígonos: triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos. En ARS QUBICA se presentan estos polígonos mostrando la presencia de éstas (y otras formas geométricas) en varias obras de arte.

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

SINOPSIS

Las intersecciones de un plano con un cubo dan lugar a 4 tipos de polígonos: triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos. En ARS QUBICA se presentan estos polígonos mostrando la presencia de éstas (y otras formas geométricas) en varias obras de arte.

CONSEJOS

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

SINOPSIS

Las intersecciones de un plano con un cubo dan lugar a 4 tipos de polígonos: triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos. En ARS QUBICA se presentan estos polígonos mostrando la presencia de éstas (y otras formas geométricas) en varias obras de arte.

CONSEJOS

- Dura 3'45''. Concentración y verlo varias (decenas de) veces.

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

SINOPSIS

Las intersecciones de un plano con un cubo dan lugar a 4 tipos de polígonos: triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos. En ARS QUBICA se presentan estos polígonos mostrando la presencia de éstas (y otras formas geométricas) en varias obras de arte.

CONSEJOS

- Dura 3'45". Concentración y verlo varias (decenas de) veces.
- 4 meses de trabajo de 8 horas diarias... infinidad de detalles.

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

SINOPSIS

Las intersecciones de un plano con un cubo dan lugar a 4 tipos de polígonos: triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos. En ARS QUBICA se presentan estos polígonos mostrando la presencia de éstas (y otras formas geométricas) en varias obras de arte.

CONSEJOS

- Dura 3'45". Concentración y verlo varias (decenas de) veces.
- 4 meses de trabajo de 8 horas diarias... infinidad de detalles.
- Música instrumental, idioma universal, encaje con imágenes.

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

SINOPSIS

Las intersecciones de un plano con un cubo dan lugar a 4 tipos de polígonos: triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos. En ARS QUBICA se presentan estos polígonos mostrando la presencia de éstas (y otras formas geométricas) en varias obras de arte.

CONSEJOS

- Dura 3'45". Concentración y verlo varias (decenas de) veces.
- 4 meses de trabajo de 8 horas diarias... infinidad de detalles.
- Música instrumental, idioma universal, encaje con imágenes.
- Un final imprevisto.

Ars Qubica, el esqueleto geométrico del arte

SINOPSIS

Las intersecciones de un plano con un cubo dan lugar a 4 tipos de polígonos: triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos. En ARS QUBICA se presentan estos polígonos mostrando la presencia de éstas (y otras formas geométricas) en varias obras de arte.

CONSEJOS

- Dura 3'45". Concentración y verlo varias (decenas de) veces.
- 4 meses de trabajo de 8 horas diarias... infinidad de detalles.
- Música instrumental, idioma universal, encaje con imágenes.
- Un final imprevisto.

www.arsqubica.com