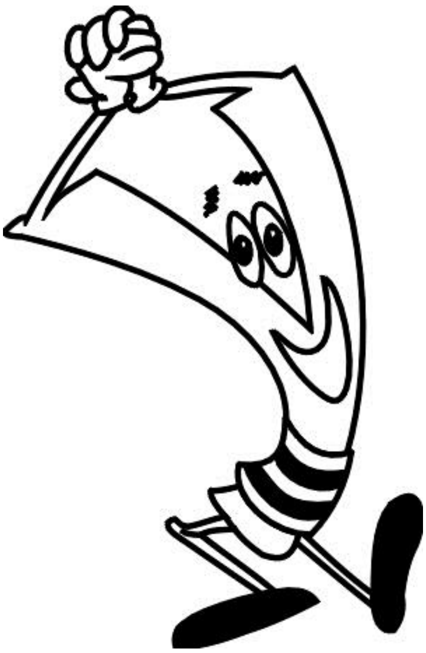
RALLYE MATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

SOLUCIONES

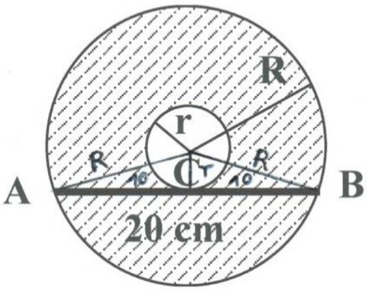


PRUEBA

2002

1- El Roscón de Reyes

Trazamos el triángulo ACB que será isósceles (los lados iguales medirán R y el desigual 20 cm)



Como el punto de tangencia de la recta divide el triángulo isósceles anterior en dos triángulos rectángulos iguales, por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\boldsymbol{R^2 = r^2 + 10^2}$$

$$\boldsymbol{R^2 - r^2 = 100}$$

Para hallar el área de la corona circular

$$\boldsymbol{S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 100\pi \approx 314{,}16\ cm^2}$$

2 – Una investigación de Sherlock Holmes

F (falso) V (verdad)

Culpable	Lo que dice Miguel es:	Lo que dice Alan es:	Lo que dice Fernando es:	Lo que dice Fran es:
Miguel	F	F	V	V
Alan	V	F	V	V
Fernando	F	F	F	V
Fran	F	V	V	F

Vemos que la solución está en la tercera fila puesto que en todas las demás hay más de una persona que dice la verdad. Por tanto, El culpable es Fernando y el único que dice la verdad es Fran.

3 – Una fecha "sorprendente"

La fecha es el 17 de Junio de 2345:

1 7 0 6 2 3 4 5

Primero se comprueba que la fecha tiene que ser del S XXI ya que los años posteriores a 1987 del s XX tendrían que repetir el 9 o el 8 y no es posible.

Si el año fuese 20AB, no se podría repetir el 0 por lo que los meses serían 11 (no es posible porque se repite el 1) o 12 (no es posible porque el 2 se necesita para no saltar de milenio puesto que buscamos el año más cercano) Así el 0 será el primer número que representa los meses.

_ _ 0 _ 2 _ _ _

En cuanto a los días no podrían llevar ni 0 ni 2 puesto que estos ya aparecen en los meses y años por lo que el primer número sería 3 ó 1.

Si fuera 3 tendría que ser 31 ya que 30 llevaría un 0 y éste ya aparece en los meses:

3 1 0 _ 2 1 _ _ repetiría el 1 y no interesa el año 24AB que sería la opción. Los días serán por tanto de la forma 1A

1 _ 0 _ 2 _ _ _ _

Por tanto el año más cercano sería 2345. De esta manera el mes más próximo será 06 y el día el 17:

17 06 2345

4 – Esas curiosas sumas

a) n+(n+1)=105 de donde 2n=104, n=52

Los dos números consecutivos serán **52 y 53**

b) (n-1)+n+(n+1)=105, de donde 3n=105, luego n=35

Los tres números consecutivos obtenidos son **34, 35 y 36**

c) Estudiamos las opciones con una cantidad PAR de números consecutivos:

a. Si son 4

$$(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=105$$
$$4n=103$$
$$n=25{,}75 \text{ } que\ no\ es\ natural$$

b. Si fueran 6:

$$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=105$$
$$6n=102$$
$$n=17$$

En este caso obtenemos **15, 16, 17, 18 , 19 y 20**

c. Con 8 no obtenemos número natural

d. Si tomamos 10 términos:

$$(n-4)+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5) = 105$$

$$10n = 100$$

$$n = 10$$

Lo números serían **6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15**

e. Con 12 términos tendríamos no obtenemos nº natural:

f. Si fueran 14:

$$(n-6)+(n-5)+(n-4)+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n+(n+1) + (n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7) = 105$$

$$14n = 98$$

$$n = 7$$

Los números serían: **1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, 11, 12, 13, y 14.**

Con un número par ya no podemos encontrar más soluciones puesto que serían números negativos

d) Estudiamos las opciones con una cantidad IMPAR de números consecutivos:

a. Si son 5

$$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) = 105$$

$$5n = 105$$

$$n = 21$$

Obtenemos así los números consecutivos: **19, 20, 21, 22 y 23**

b. Si fueran 7:

$$7n = 105$$

$$n = 15$$

En este caso obtenemos **12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18**

c. Si fueran 9:

$$9n = 105$$

que no daría un número natural.

Así sucesivamente hasta el siguiente divisor de 105 que es 15 (términos)

$$15n = 105$$

$$n = 7$$

Lo números serían **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14**

Como han de ser estrictamente positivos, esta solución no es válida, Ya no quedan más opciones porque la siguiente daría números negativos.

Por tanto hemos obtenido **7 posibilidades:**

PAR	**Con 2:** **52 y 53**	**Con 6:** **15, 16, 17, 18, 19 y 20**	**Con 10:** **6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15**	**Con 14:** **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14**
IMPAR	**Con 3:** **34, 35 y 36**	**Con 5:** **19, 20, 21, 22 y 23**	**Con 7:** **12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18**	

Otra forma de resolverlo

Generalizamos los apartados 2 y 3 escribiendo n números consecutivos cuya suma es 105 llamando x al primero:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \cdots + \big(x + (n - 1)\big) = 105$$

Agrupando sería: $nx + \big(1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)\big) = 105$

Aplicando la suma de los n-1 términos de la progresión aritmética que forma nuestra sucesión de números naturales, se tiene:

$$nx + \frac{n(n - 1)}{2} = 105$$

Y despejando x:

$$x = \frac{210 + n - n^2}{2n}$$

Siendo n el número de términos que sumamos.

Así podemos ir dando a n valores a partir de 4 (en los apartados a y b habíamos visto la suma de n=2 y n=3 términos) obteniendo mediante la fórmula el primer número natural x. Cuando x no sale natural es porque no existe solución para ese nº de términos. Los resultados son:

$$Si\ n = 5 \underset{si}{\Rightarrow} x = 19$$

$$Si\ n = 6 \underset{si}{\Rightarrow} x = 15$$

$$Si\ n = 7 \underset{si}{\Rightarrow} x = 12$$

$$Si\ n = 10 \underset{si}{\Rightarrow} x = 6$$

$$Si\ n = 14 \underset{si}{\Rightarrow} x = 1$$

Para los siguientes valores obtendríamos x=0 o números negativos. Por ello, en total, hay 7 posibilidades (nº de términos n= 2, 3, 5, 6, 7, 10 y 14)

5 –El buen año

a) Si al dividir 2002 entre 5 nos da de resto 2: 2002=5n+2

Así:

$2002^2 = (5\text{n} + 2)^2 = 25n^2 + 20\text{n} + 4 = 5(5\text{n} + 4\text{n}) + 4$

luego el resto al dividir 2002^2 por 5 es 2^2= 4

b) De la misma manera podemos obtener 2002^3:

$$2002^3 = (5\text{n} + 2)^3 = 125n^3 + 150n^2 + 60\text{n} + 8 = 5(25n^3 + 30n^2 + 12\text{n}) + 8$$

Luego el resto de dividir 2002^3 por 5 es 2^3= 8

c) $2002^{2002} = (5\text{n} + 2)^{2002}$ como todos los términos de su desarrollo tienen a 5 como factor salvo el último, el resto es 2^{2002}

6 – Escalar el poste

Sabiendo que $\frac{CH}{AH} = 0{,}466$

Tenemos:

$$\frac{10}{AH} = 0{,}466$$

De donde obtenemos $AH = \frac{10}{0{,}466} = 21{,}5$

Por Tales:

$$\frac{CH}{AH} = \frac{XH}{BH} = 0{,}466$$

Así: $\frac{XH}{BH} = \frac{XC+10}{AH+6} = \frac{xc+10}{27{,}5} = 0{,}466$

Despejamos XC:

$$XC = 0{,}466 \cdot 27{,}5 - 10 = 2{,}82\, m$$

Especial Tercero de ESO

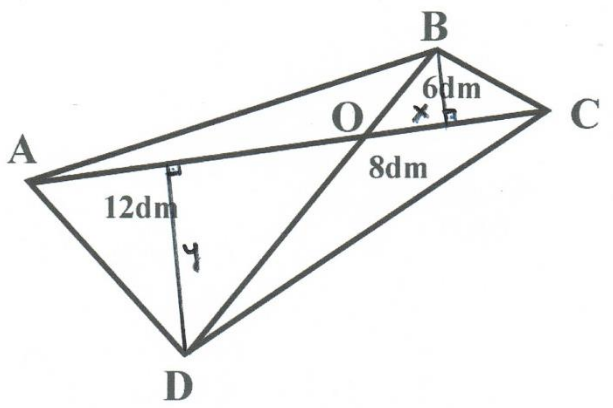
7 - ¡Vaya cometa!

Trazamos las alturas del triángulo AOD (y) que también lo será del triángulo OCD y la de OBC (x) que también lo será del triángulo OBC.

El área del triángulo OAB será

$$a = \frac{OA \ \cdot x}{2}$$

siendo a el área del triángulo OAB que es lo que nos piden.



El área del triángulo OBC es:

$$6 = \frac{OC \ \cdot x}{2}$$

Si dividimos miembro a miembro las dos expresiones anteriores, obtenemos:

$$\frac{a}{6} = \frac{OA \ \cdot x}{OC \cdot x} = \frac{OA}{OC}$$

El área del triángulo AOD es:

$$12 = \frac{OA \ \cdot y}{2}$$

El área del triángulo OCD es:

$$8 = \frac{OC \ \cdot y}{2}$$

Dividimos miembro a miembro y obtenemos:

$$\frac{12}{8} = \frac{OA \ \cdot y}{OC \cdot y} = \frac{OA}{OC}$$

Teníamos

$$\frac{a}{6} = \frac{OA}{OC}$$

y ahora hemos obtenido

$$\frac{3}{2} = \frac{OA}{OC}$$

Por tanto:

$$\frac{3}{2} = \frac{a}{6}$$

Se tiene que

$$a = 9\ dm^2$$

8 – La multiplicación de los cubos

Contamos ordenadamente:

<u>Con 0 caras pintadas</u> (total 12):

- Intermedios de la cara inferior: 4
- Interiores del cubo grande: 4.2=8

<u>Con 1 caras pintada</u> (total 28):

- Laterales Inferiores intermedios: 2.4=8
- Laterales intermedios: 4.4=16
- Superiores intermedios: 4

<u>Con 2 caras pintadas</u> (total 20):

- Esquinas laterales salvo la superior: 3.4=12
- Laterales superiores: 2.4=8

<u>Con 3 caras pintadas</u> (total 4):

- Esquinas superiores: 4

Comprobamos que la suma nos da los 4^3=64 cuadraditos:

12+28+20+4=64

7 – Paso al Euro

Si llamamos $\dot{N}$ a un múltiplo cualquiera de N:

$$427 = \dot{N} + 7$$

$$519 = \dot{N} + 3$$

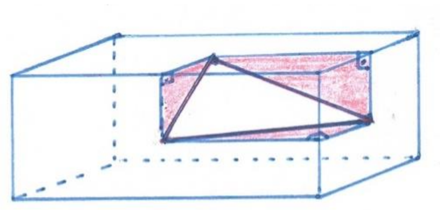
Luego $420 = \dot{N}$ y $516 = \dot{N}$ Es decir, N es divisor común de 420 y 516.

Los posibles divisores comunes serían 2,3,4, 6 y 12 .

Debe ser N=12 ya que si fueran 2, 3, 4 ó 6 no podrían sobrar 7 monedas.

8 – La caja

Para cada dos centros formamos el triángulo rectángulo que se obtiene al proyectar sobre las dos caras correspondientes el segmento que une los dos centros. Si llamamos a, b y c a las dimensiones de la caja y aplicamos Pitágoras, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:



$$\begin{cases} \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 16^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 24^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 20^2 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 1024 \\ a^2 + b^2 = 2304 \\ c^2 + a^2 = 1600 \end{cases}$$

Restando la primera y segunda ecuación obtenemos:

$c^2 - a^2 = -1280$ que junto a la tercera nos da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolvemos por reducción:

$$\begin{cases} c^2 - a^2 = -1280 \\ c^2 + a^2 = 1600 \end{cases}$$

De donde $2c^2 = 320$ así $c = 4\sqrt{10}$

Si restamos ahora las segunda y tercera ecuación tenemos:

$$\begin{cases} b^2 - c^2 = 704 \\ b^2 + c^2 = 1024 \end{cases}$$

Que nos da $b = 12\sqrt{6}$

Y, finalmente, de la ecuación $a^2 + c^2 = 1600$ y sustituyendo c por el valor obtenido, nos da

$$a = 12\sqrt{10}$$

Por tanto, el volumen de la caja será:

$$V = a \cdot b \cdot c = 12\sqrt{10} \cdot 12\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{10} = 5760\sqrt{6} \cong 14.109{,}06\ cm^3$$