'

Problemas de contar
Taller del Talento Matemático

Paz Jiménez Seral
profesora de álgebra en la Universidad de Zaragoza

20 de febrero 2015

En mi primer libro

Yendo al pueblo de San Marcos me crucé con un señor con 7 esposas.
Cada esposa tenía 7 sacos,
cada saco tenía 7 gatos,
cada gato tenía 7 gatitos.
Entre gatitos, gatos, sacos y esposas
¿Cuántos iban al pueblo de San Marcos?

La respuesta es ninguno

Pero cruzarme, me cruce en total con
7 esposas, $7 \cdot 7 = 49$ sacos, $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ gatos, $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$ gatitos.
Total $7 + 49 + 343 + 2401 = 2800$
Total $7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7(1 + 7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7(8 + 49(1 + 7)) = 7(8(1 + 49)) = 7 \cdot 8 \cdot 50 = 28 \cdot 100 = 2800$

1542

Yendo al pueblo de San Marcos me crucé con un señor con 7 esposas.
Cada esposa tenía 7 sacos,
cada saco tenía 7 gatos,
cada gato tenía 7 gatitos.
Entre gatitos, gatos, sacos y esposas
¿Cuántos iban al pueblo de San Marcos?

La respuesta es ninguno

Pero cruzarme, me cruce en total con
7 esposas, $7 \cdot 7 = 49$ sacos, $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ gatos, $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$ gatitos.
Total $7 + 49 + 343 + 2401 = 2800$
Total $7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7(1 + 7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7(8 + 49(1 + 7)) = 7(8(1 + 49)) = 7 \cdot 8 \cdot 50 = 28 \cdot 100 = 2800$

¿Cuántos collares distintos podemos hacer?

Las cuentas son semiesféricas.
Los collares no tienen broche.
Pasamos un hilo y unimos los extremos.

Con 13 cuentas

- Si tenemos 5 cuentas negras, 5 azules y 3 rojas.
- Si tenemos 13 cuentas distintas.

Con 12 cuentas

- Si tenemos 5 cuentas negras, 5 azules y 2 rojas.
- Si tenemos 12 cuentas distintas.

¿Cuántos collares distintos podemos hacer?

Las cuentas son semiesféricas.
Los collares no tienen broche.
Pasamos un hilo y unimos los extremos.

Con 13 cuentas

- Si tenemos 5 cuentas negras, 5 azules y 3 rojas.
- Si tenemos 13 cuentas distintas.

Con 12 cuentas

- Si tenemos 5 cuentas negras, 5 azules y 2 rojas.
- Si tenemos 12 cuentas distintas.

¿Cuántas formas hay de colocar en fila 13 cuentas?

- 13 cuentas distintas las podemos poner en fila de $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 13!$ formas
- ¿ Y si tenemos 5 cuentas negras, 5 azules y 3 rojas?
- Piensa que tenemos que elegir 5 lugares para las negras, 5 para las azules y 3 para las rojas.
- ¿ Serán $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ las posibles formas de elegir los lugares para las negras?

NO !!!!!

- Da igual los lugares $1, 3, 4, 2$ y 9 que los lugares $4, 2, 9, 1$ y 3.
- ¿ Si hemos elegido 5 lugares de cuántas formas se pueden ordenar? De $5!$ formas.
- Las posibles maneras de elegir los 5 lugares para colocar las cuentas negras son $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9/5!$

Universidad Zaragoza 1542

¿Cuántas formas hay de colocar en fila 13 cuentas?

- 13 cuentas distintas las podemos poner en fila de $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 13!$ formas
- ¿ Y si tenemos 5 cuentas negras, 5 azules y 3 rojas?
- Piensa que tenemos que elegir 5 lugares para las negras, 5 para las azules y 3 para las rojas.
- ¿ Serán $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ las posibles formas de elegir los lugares para las negras?

NO !!!!!

- Da igual los lugares $1, 3, 4, 2$ y 9 que los lugares $4, 2, 9, 1$ y 3.
- ¿ Si hemos elegido 5 lugares de cuántas formas se pueden ordenar? De $5!$ formas.
- Las posibles maneras de elegir los 5 lugares para colocar las cuentas negras son $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9/5!$

Universidad Zaragoza 1542

Volvemos al problema

¿De cuántas formas se pueden colocar en fila 5 cuentas negras, 5 azules y 3 rojas?

La respuesta es

$$(13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9/5!)(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4/5!)(3 \cdot \cdot 2 \cdot 1/3!) =$$

$$= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cdot 2 \cdot 1}{5! \cdot 5! \cdot 3!}$$

Volvemos al problema

¿De cuántas formas se pueden colocar en fila 5 cuentas negras, 5 azules y 3 rojas?

La respuesta es

$$(13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9/5!)(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4/5!)(3 \cdot \cdot 2 \cdot 1/3!) =$$

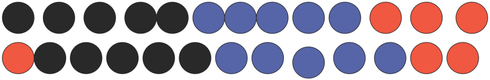
$$= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cdot 2 \cdot 1}{5! \cdot 5! \cdot 3!}$$

Universidad Zaragoza 1542

Pasamos el hilo para hacer collares

Nos encontramos que filas distintas pueden dar el mismo collar

Por ejemplo estas dos filas dan el mismo collar

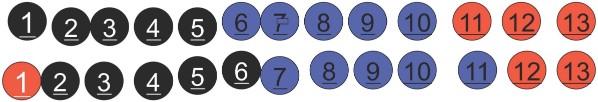


Universidad Zaragoza
1542

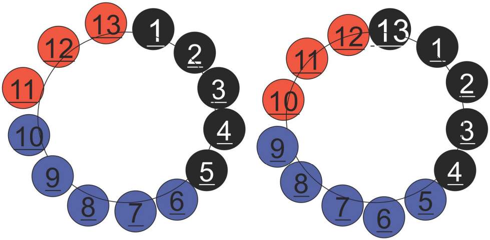
¿Cuántas filas me dan el mismo collar?

Numeramos los lugares de la fila

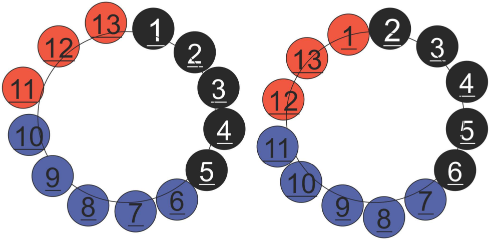
Y vemos que filas distintas dan el mismo collar.



Imagina los collares..



Las filas que hemos puesto antes



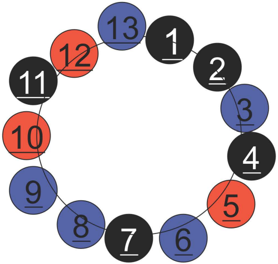
Dado un collar, cuántas filas distintas salen

- Imagina el collar y una ruleta con los números debajo.
- Si muevo la ruleta tengo una numeración para las bolas y por tanto una fila que me proporciona el collar.
- ¿ Cuántos movimientos distintos puede hacer la ruleta?
- Giros de trece amplitudes distintas. (El uno puede quedar en trece bolas distintas)

¿Estás seguro de que así obtenemos 13 filas distintas?

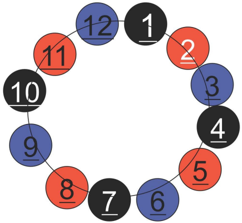
Universidad Zaragoza 1542

Mira de este otro collar cuántas filas distintas salen



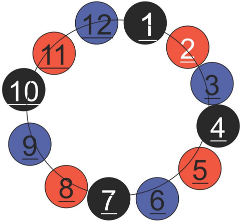
- ¿ Cuántas filas consigo con este collar girando la ruleta?
- Sí también son trece. Pero ¿Y con otro collar?
- ¿Hay alguna posibilidad de que sean menos de 13?
- Hay que pensar en un giro de la ruleta que me pueda llevar de una fila a la misma fila. ¿Puede ser?

¿Qué ocurre con este collar?



- ¿ Cuántas filas consigo con este collar girando la ruleta?
- Sí también son trece. Pero ¿Y con otro collar?
- ¿Hay alguna posibilidad de que sean menos de 13?
- Hay que pensar en un giro de la ruleta que me pueda llevar de una fila a la misma fila. ¿Puede ser?

¿Qué ocurre con este collar?



No es de los nuestros!Tiene 12 bolas y .

- Pero en este caso girando la ruleta solo consigo 3 filas distintas.
- En nuestro caso ¿ dónde tendrían que estar las bolas negras?
- Necesitaríamos un número de bolas negras divisor de 13 y tenemos 5.
- En nuestro caso, girando la ruleta con cualquier collar obtenemos 13 filas distintas.

¿Cuántos collares distintos podemos hacer si tenemos 5 cuentas negras, 5 azules y 3 rojas?

La respuesta es

$$= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cdot 2 \cdot 1}{5! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 13}$$

No es de los nuestros!Tiene 12 bolas y .

- Pero en este caso girando la ruleta solo consigo 3 filas distintas.
- En nuestro caso ¿ dónde tendrían que estar las bolas negras?
- Necesitaríamos un número de bolas negras divisor de 13 y tenemos 5.
- En nuestro caso, girando la ruleta con cualquier collar obtenemos 13 filas distintas.

¿Cuántos collares distintos podemos hacer si tenemos 5 cuentas negras, 5 azules y 3 rojas?

La respuesta es

$$= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cdot 2 \cdot 1}{5! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 13}$$

Universidad Zaragoza 1542

Ordenar el razonamiento para problemas más difíciles.
¿Cuántos collares con 4 cuentas negras, 4 azules y 4 rojas?

- Vamos a imaginar los collares quietos, fijos sobre una mesa. Las bolas sobre los vértices de un polígono regular de doce lados con los vértices numerados. Contar estos collares pegados a la mesa es lo mismo que contar las filas.

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$$

- Si suelto los collares algunas coloraciones de las que tengo son indistinguibles. Si girando un collar llego a otro, los dos son iguales.

- Cuando hago dos giros el resultado es un giro. Para esto hay que contar como giro el no moverse, lo que se llama giro identidad. Para cada giro, hay otro que seguido me da la identidad, le llamaremos giro inverso.
- Así hay 12 giros que dejan fijo ese polígono de 12 lados y llevan un collar a otro collar.
- Se dice que dos collares, de los pegados a la mesa, están en la misma órbita cuando paso del uno al otro con un giro.
- Una órbita está formada por los collares pegados que cuando los suelto son el mismo. Nuestro problema consiste en contar el número de órbitas. Y para eso tenemos que saber cuántos collares quietos(o filas) hay en la misma órbita (como mucho serán 12, gracias al primer punto)

Universidad Zaragoza
1542

- Si de una fila, collar fijo, que llamaremos coloración, con dos giros distintos paso a una misma coloración, es que uno de ellos compuesto con el inverso del otro me deja fija la coloración.
- El estabilizador de una coloración es el conjunto de giros que me la dejan igual. (la identidad siempre está en el estabilizador)
- Ponte ejemplos para ver y convencerte de que el número de coloraciones distintas que hay en una misma órbita (filas que dan el mismo collar) es 12 dividido por el numero de giros que estabilizan a una de las coloraciones que la componen. Vuelve al ejemplo del dibujo. Dicho de otra manera, para contar el número de filas que dan el mismo collar, se divide 12 por el número de giros que me llevan a la misma fila.
- Ahora pensamos al revés. Para cada uno de los 12 giros vamos a ver cuántas coloraciones hay que queden fijas cuando les aplico ese giro.

- Y ahora vamos a considerar todos los pares formados por una coloración y un giro que la fija. Pares de la forma (c,g), donde c es una coloración y g es un giro. Dibújate alguno de estos pares.
- Llamamos n al número de órbitas (que es nuestra incognita).
- Vamos a contar los pares descritos en el apartado anterior.
- Ya hemos comentado que en la órbita 1 hay $12/s_1$ coloraciones dnde s_1 el número de giros que estabilizan una de sus coloraciones. En general en la órbita i hay $12/s_i$ coloraciones.
- Con una coloración de la órbita primera ¿cuántos pares tengo de los que quiero contar? La respuesta es s_1. Y sumando todos los pares que corresponden a coloraciones de la primera órbita, obtengo $\frac{12}{s_1} \cdot s_1$, que es 12.
- Y lo mismo ocurre con todas las órbitas luego el número de pares a contar es $n12$.
- Si nos fijamos en las doce posibilidades para los giros, para cada una de ellas tenemos el número de coloraciones que fija.

Universidad Zaragoza 1542

- La identidad fija todas las coloraciones.
- El giro α de un doceavo de vuelta. Para que una coloración quede fija tiene que tener la cuenta del lugar 1 del mismo color que la del lugar 2. Y la del lugar 2 igual que la del 3, etctera. Total que todas las cuentas deben ser del mismo color que en nuestro problema es imposible. As α no sale en ningún par.
- El giro α^2 de dos doceavos de vuelta. Lleva la bola 1 a la 3 , la 3 a la 5, la 5 a la 7, la 7 a la 9. Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $1, 3, 5, 7, 9, 11$ lo cual es imposible porque en nuestro problema no tenemos 6 bolas del mismo color. As α^2 no sale en ningún par.

- El giro α^3 de tres doceavos de vuelta. Lleva la bola 1 a la 4 , la 4 a la 7, la 7 a la 10, la 10 a la 1. Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $1, 4, 7, 10$. Además lleva la bola 2 a la 5 , la 5 a la 8, la 8 a la 11, la 11 a la 2. Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $2, 5, 8, 11$
  Además lleva la bola 3 a la 6 , la 6 a la 9, la 9 a la 12, la 12 a la 3. Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $3, 6, 9, 12$. Elegimos un color para los números $1, 4, 7, 10$, tenemos tres posibilidades, elegimos otro para los números $2, 5, 8, 11$, tenemos dos posibilidades y el color que queda para los lugares $3, 6, 9, 12$. Tenemos exactamente 6 coloraciones que quedan fijas al aplicarles α^3

- El giro α^4 decuatro doceavos de vuelta. Lleva la bola 1 a la 5 , la 5 a la 9, la 9 a la 1. Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $1, 5, 9$. Además lleva la bola 2 a la 6 , la 6 a la 10, la 10 a la 2. Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $2, 6, 10$. Análogamente tiene que tener el mismo color en los lugares $3, 7, 11$ y el mismo color en los lugares $4, 8, 12$. Esto es imposible con nuestro ejemplo. As α^4 no sale en ningún par.
- El giro α^5 de cinco doceavos de vuelta.Lleva la bola 1 a la 6 , la 6 a la 11, la 11 a la 4, la 4 a la 9, la 9 a la 2. Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $1, 6, 11, 4, 9, 2$ lo cual es imposible porque en nuestro problema no tenemos 6 bolas del mismo color. As α^5 no sale en ningún par.

- El giro α^6 de seis doceavos de vuelta. Lleva la bola 1 a la 7 , la 7 a la 1 Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $1, 7$. Además lleva la bola 2 a la 8 , la 8 a la 2, la 3 a la 9 y la 9 a la 3. Para que una coloración quede fija tiene que tener del mismo color las bolas de los lugares $7, 1$, mismo color las bolas de los lugares $8, 2$, mismo color las bolas de los lugares $9, 3$, mismo color las bolas de los lugares $10, 4$, mismo color las bolas de los lugares $11, 5$, mismo color las bolas de los lugares $12, 6$.
  Hay que elegir dos bloques, de los seis que tenemos, para el color negro, dos para el azul y otros dos para el rojo, tenemos

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

Análogamente se puede ver que

- El giro α^7 (que es el inverso de α^5),no aparece en ningún par.
- El giro α^8 no aparece en ningún par.
- El giro α^9 aparece exactamente en 6 pares
- El giro α^10 no aparece en ningún par.
- El giro α^11 no aparece en ningún par.

Así contando los pares de las dos maneras tenemos

$$n \cdot 12 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 4! \cdot 4!} + 6 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2! \cdot 2!} + 6$$

Operando

$$n \cdot 12 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 4! \cdot 4!} + 6 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2! \cdot 2!} + 6$$

$$n \cdot 12 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 + 12 + 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90(11 \cdot 7 \cdot 5 + 1) + 12 = 90 \cdot 386 + 12$$

Y se obtiene

$$n = 15 \cdot 193 + 1$$

El número de collares es 2896

Universidad Zaragoza
1542

Más problemas

- ¿Cuántos collares distintos podemos hacer de doce cuentas si tenemos muchas negras, azules y rojas?
- ¿de cuántas formas se pueden pintar las caras del tetraedro suponiendo que tengo cinco colores?
- ¿de cuántas formas se pueden pintar las caras del tetraedro suponiendo que tengo cinco colores y que no puedp repetir ningún color?
- ¿de cuántas formas se pueden pintar las caras de un cubo suponiendo que tengo cinco colores?

Las llamadas funciones de verdad, se pueden interpretar como posibles circuitos eléctricos de n interruptores.

$$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

Pensemos en el caso $n = 4$. $\{0,1\}^4$ tiene $2^4 = 16$ elementos, así que el número de funciones es $2^{16} = 65536$.
Consideramos una de ellas:

$$0000 \to 1, 0001 \to 1, 0010 \to 1, 0100 \to 0$$

$$1000 \to 1, 0011 \to 0, 0101 \to 0, 1001 \to 1$$

$$0110 \to 1, 1010 \to 0, 1100 \to 1, 0111 \to 0$$

$$1011 \to 0, 1101 \to 1, 1110 \to 1, 1111 \to 0$$

Universidad Zaragoza 1542

Podemos ordenar los 4 circuitos de otro modo

Imagina que pones el 1 en el 2 y el 2 en el 1 y dejas el 3 y el 4. como están (es otra forma de representar el mismo circuito y la funcion correspondiente es $f_2(b_2, b_1, b_3, b_4) = f(b_1, b_2, b_3, b_4)$.

$$0000 \to 1, 0001 \to 1, 0010 \to 1, 1000 \to 0$$

$$0100 \to 1, 0011 \to 0, 1001 \to 0, 0101 \to 1$$

$$1010 \to 1, 0110 \to 0, 1100 \to 1, 1011 \to 0$$

$$0111 \to 0, 1101 \to 1, 1110 \to 1, 1111 \to 0$$

Estas dos funciones son distintas pero en realidad representan el mismo circuito.

La cuestión es

¿Cuántos circuitos distintos podemos hacer con 4 interruptores?

Mejorando un poquito la fórmula de las órbitas se consigue resolver este problema sin hacer apenas cuentas. Este problema se planteó y se resolvió en el ao 1951 utilizando el computador ms importante que existía en ese momento. No se sabían la fórmula.

La respuesta es 3984 (por si lo intentas

Universidad Zaragoza 1542

Para atacar el problema: Cada cambio en la formas de numerar los 4 interruptores te produce una especie de movimiento en el conjunto de las funciones, te lleva unas funciones a otras. En ele ejmplo teníamos una función, le hemos hecho un movimiento y hemos pasado a otra. Ahora dos funciones están en la misma órbita cuando pasas de una a otra por un movimiento. Y como antes tenemos que contar las órbitas. Ahora tenemos 24 posibles movimientos.