TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO

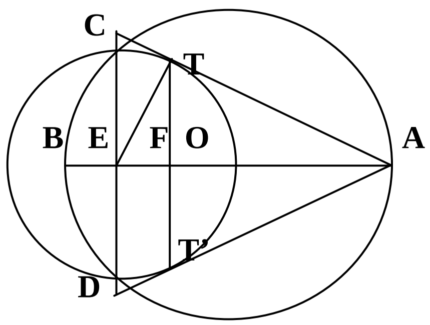
PROBLEMAS DE OPOSICIONES DE SECUNDARIA DE ARAGÓN
AÑOS 1998, 2002, 2004 Y 2014
(Algunas de las soluciones han sido tomadas de la academia DEIMOS)

- En una circunferencia de centro O y radio unidad, se traza un diámetro AB y una cuerda CD que corta perpendicularmente a ese diámetro en un punto E. Se considera la circunferencia que tiene por diámetro CD y se trazan desde el punto A las tangentes AT y AT' a esta circunferencia, siendo T y T', respectivamente, los puntos de tangencia. Sea F el punto de intersección de AB y TT'. Se pide:

a) **Demostrar que E es el punto medio del segmento FB.**
b) **Teniendo en cuenta el resultado anterior y haciendo BE=x, determinar en función de x el área del triángulo ATT'.**

(Aragón 1998)

a)



$\overline{AB} = 2$
$\overline{OA} = \overline{OB} = 1$

¿ $\overline{EB} = \overline{EF}$?

El eje radical de dos circunferencias es la recta perpendicular que pasa por sus puntos de corte, en este caso E pertenece al eje radical de las dos circunferencias trazadas (recta CD).

Todos los puntos del eje radical cumplen que su potencia con respecto a las dos circunferencias es la misma, en este caso: $r^2 = \overline{EC}\cdot \overline{ED} = \overline{EB}\cdot \overline{EA} = x\cdot(2-x)$ donde r es el radio de la circunferencia de centro E y x es la medida $\overline{EB}$, por lo tanto $\overline{EA} = 2 - x$.

Por semejanza de triángulos, $FET \approx TEA$, o aplicando el teorema del cateto, tenemos $\frac{y}{\overline{ET}} = \frac{\overline{ET}}{\overline{AE}}$, donde $y = \overline{EF}$.

O lo que es lo mismo: $y\cdot(2-x) = r^2$, como $r^2 = x\cdot(2-x)$, se obtiene la igualdad pedida x=y, $\overline{EB} = \overline{EF}$.

b) ÁreaATT'=2ÁreaTAF=$2\frac{\overline{AF}\cdot \overline{TF}}{2} = \overline{AF}\cdot \overline{TF} = (2-2x)\cdot\sqrt{x\cdot(2-2x)}$ ya que aplicando el teorema de la altura y que $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{EF} - \overline{EB} = \overline{AB} - 2\overline{EB} \Rightarrow \overline{TF}^2 = \overline{EF}\cdot \overline{AF} = x\cdot(2-2x)$.

- En una cata de vinos a ciegas intervienen 5 jueces a los que se les sirven dos vinos, uno del campo de Borja y otro del Somontano. El vino seleccionado para la cata se hace con el lanzamiento de una moneda perfecta, a cara o cruz. Cada juez, independientemente, tiene probabilidad ¾ de adivinar el tipo de vino que le han servido. Si 4 de los jueces dicen que el vino servido es del campo de Borja, y el otro que es del Somontano, calcular la probabilidad de que el vino que han catado sea del Somontano.

(Aragón 1998)

La probabilidad de que el vino elegido para la cata sea un Somontano es ½, al igual que la de elegir un Borja.

Por otro lado la probabilidad de que cualquiera de los jueces acierte el vino catado es ¾.

Utilizando el teorema de Bayes obtenemos el siguiente resultado:

$$P(S/4B1S)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{2\cdot 4^5}}{\frac{3^4+3}{2\cdot 4^5}}=\frac{1}{3^3+1}=\frac{1}{28}$$

Donde el numerador representa la probabilidad de que el vino catado por los jueces sea un Somontano y que sólo uno de los jueces haya acertado, y el denominador representa la probabilidad de que 4 de los 5 jueces respondan que el vino servido es del campo de Borja independientemente del vino tomado en la cata.

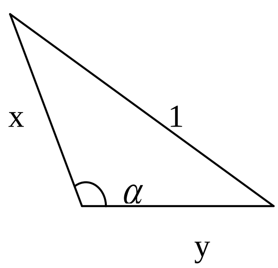
- Se eligen al azar dos puntos x e y tales que 0<x<1, 0<y<1. Hallar la probabilidad de que se pueda construir un triángulo obtusángulo cuyos lados midan 1, x e y.

(Aragón 2002)

Solución: La construcción de un triángulo de lados 1, x e y sólo es posible si: x<1+y, y<1+x, x+y>1.

Nótese que las dos primeras condiciones se cumplen siempre por ser 0<x, y<1.

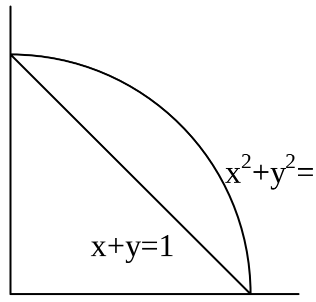
El que el lado de longitud 1 sea el mayor del triángulo asegura que su ángulo opuesto, que llamaremos α, es el mayor del triángulo.



El triángulo será entonces obtusángulo si y sólo si $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

o, lo que es lo mismo, si cos α<0.

El teorema del coseno nos conduce a la solución. Según éste, es $1^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$ o, equivalentemente, $\cos\alpha=\dfrac{x^2+y^2-1}{2xy}$ de manera que el triángulo es obtusángulo si y sólo si $\dfrac{x^2+y^2-1}{2xy}<0$, es decir, si $x^2+y^2<1$, dado que el denominador es siempre positivo.



Utilizando la regla de Laplace, obtenemos que la probabilidad pedida es el cociente entre los casos favorables y los casos posibles, es decir,

$$P(x+y>1, x^2+y^2<1)=\frac{\acute{a}rea\left\{(x,y)\in(0,1)x(0,1): x+y>1, x^2+y^2<1\right\}}{\acute{a}rea\ de(0,1)x(0,1)}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

- Se considera un cono de revolución con una esfera inscrita tangente a la base del cono. Circunscribimos a esta esfera un cilindro de forma que una de sus bases esté sobre la base del cono. Sean V_1 el volumen del cono y V_2 el del cilindro.

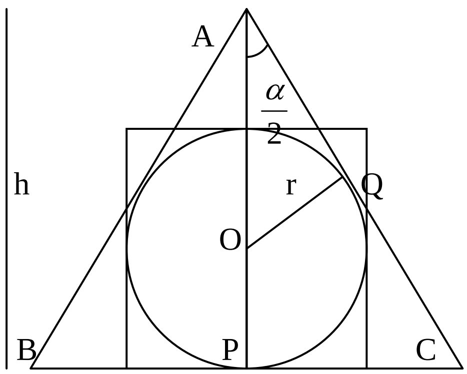
a) Probar que $V_1 \neq V_2$.

b) Encontrar el menor número real k para el que se da la igualdad $V_1=kV_2$ y, para dicho valor, calcular el ángulo bajo el que se ve un diámetro de la base del cono desde el vértice del mismo.

(Aragón 2004)

Solución: El primer apartado es de hecho una consecuencia del segundo, por lo que resolveremos ambos simultáneamente.

Se trata de calcular un valor mínimo k que toma el cociente V_1/V_2 y comprobar que es mayor que 1, lo que también resuelve el primer apartado.



Sea h la altura del cono y r el radio de la esfera.

Las longitudes h y r determinan unívocamente el radio de la base, r , y la altura del cilindro, 2r , así como el radio R de la base del cono.

Así ocurre efectivamente ya que los triángulos rectángulos AOQ y ACP del gráfico son semejantes por tener un ángulo agudo común $\alpha/2$.

Por tanto, CP/AP=OQ/AQ, es decir $\frac{R}{h}=\frac{r}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}$ de donde se sigue $R=r\sqrt{\frac{h}{h-2r}}$

Las anteriores igualdades tienen perfecto sentido pues AO=h-r es la hipotenusa del triángulo rectángulo AOQ, y por tanto es mayor que el cateto OQ=r, es decir, h-r>r, o lo que es igual, h>2r. Con estas notaciones, los volúmenes del cono y del cilindro son, respectivamente, $V_1=\frac{\pi R^2 h}{3}=\frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}$; $V_2=\pi r^2 2r=2\pi r^3$.

Así, el cociente vale $\frac{V_1}{V_2}=\frac{h^2}{6r(h-2r)}=\frac{1}{6\frac{r}{h}(1-2\frac{r}{h})}$, y puede ser expresado sólo en función de x=r/h: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{6x(1-2x)}$

Ya hemos deducido que obligadamente es h>2r, o equivalentemente, r/h<1/2, y por tanto x=r/h $\in$ (0, ½). Se trata por tanto, para resolver el apartado segundo, de calcular el mínimo valor que toma la función V_1/V_2 dada por x$\in$ (0, ½)$\rightarrow \frac{1}{6x(1-2x)}$ o, lo que es equivalente por tratarse de una función siempre positiva, determinar el valor máximo, si existe, de la función V_2/V_1: (0, ½)$\rightarrow\Re$ dada por x$\rightarrow 6x(1-2x)=-12x^2+6x$

La gráfica de esta última función es un trozo de parábola cóncava con el vértice en $x=\frac{-6}{2(-12)}=\frac{1}{4}\in(0,1/2)$, punto en el que evidentemente se alcanza el valor máximo. Dicho valor máximo es $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$, y de aquí que el valor mínimo de V_1/V_2 es k=4/3.

La respuesta al apartado a) es ya inmediata. Según lo anterior, es $V_1/V_2 \geq 4/3>1$ y de aquí que $V_1>V_2$ en cualquier caso.

Para concluir, calculamos el ángulo α de la figura cuando V_1/V_2 es mínimo. Acabamos de probar que, en este caso, x=r/h=1/4, por lo que

$$sen\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{h-r}=\frac{\frac{r}{h}}{1-\frac{r}{h}}=\frac{x}{1-x}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$ y por ello $\alpha=2arcsen\frac{1}{3}$.

- Determine una función derivable f:[0,2]→ℜ tal que f(1)=1, f(2)=7 y tal que para cada x∈[0,2] sea $3\int_0^x f(t)dt = (f(x)+2f(0))x$

(Aragón 2014)

Solución: La función f es continua en el intervalo [0,2], por ser derivable en dicho intervalo, así que la función x→ $\int_0^x f(t)dt$ es, por el Teorema fundamental del Cálculo, derivable en cada x∈[0,2], siendo: $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = f(x)$

Podemos por tanto derivar en la igualdad del enunciado, obteniendo, para cada x∈[0,2], que $3f(x) = xf'(x) + f(x) + 2f(0)$ es decir, $2(f(x) - f(0)) = xf'(x)$

En particular, para cada x∈(0,2] es $f'(x) = 2\frac{f(x) - f(0)}{x}$ lo que garantiza, por ser f derivable en (0,2], que también f' es derivable en (0,2].

Derivando entonces en la expresión $2(f(x) - f(0)) = xf'(x)$ se tiene, para x∈(0,2], que $2f'(x) = f'(x) + xf''(x)$ es decir, $f'(x) = xf''(x)$

La última igualdad, cierta para todo x∈(0,2], puede ser escrita en la forma $f''(x) = \frac{f'(x)}{x}$ y demuestra, por ser f' derivable en (0,2], que también lo es f'', de modo que al derivar en ella obtenemos: $f''(x) = f''(x) + xf'''(x)$ o lo que es igual, $xf'''(x) = 0$ para cada x∈(0,2]. Por tanto, es $f'''(x) = 0$, para cada x∈(0,2] y de ello se deduce que f'' es constante en el intervalo (0,2], pongamos f''(x)=c.

Sustituyendo en $f'(x) = xf''(x)$ obtenemos que $f'(x) = cx$ para cada x∈(0,2] y, al sustituir en $2(f(x) - f(0)) = xf'(x)$ deducimos que: $2(f(x) - f(0)) = cx^2$ es decir, $f(x) = f(0) + \frac{1}{2}cx^2$ para cada x∈(0,2]. Como son f(1)=1 y f(2)=7, al sustituir en la igualdad anterior se deduce que $f(0) + \frac{c}{2} = 1$, $f(0) + 2c = 7$.

Al restar ambas igualdades se obtiene que $\frac{3c}{2} = 6$, es decir, c=4, y al sustituir en la segunda igualdad, f(0)=-1. Sustituyendo en $f(x) = f(0) + \frac{1}{2}cx^2$ se tiene que, para cada x∈(0,2] es $f(x) = -1 + 2x^2$ y como también es $f(0)=-1=-1+2\cdot 0^2$, resulta que la función buscada es la función f:[0,2] →ℜ definida por $f(x)=-1+2x^2$.