SESIÓN TTM 2015
ALGUNAS GENERALIZACIONES EN TORNO AL NÚMERO DE ORO

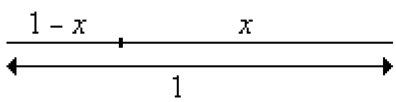
Hasta el infinito...¡ y más allá!
Buzz Lightyear. Toy Story

Según la definición de la R.A.E. **generalizar** es: Abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas.

Alberto Montt. Viñeta aparecida en su blog Dosis Diarias el 29/03/2010

EL NÚMERO DE ORO.
Definición

La proporción áurea o divina proporción está formulada ya en los *Elementos* de Euclides (s.III a.C.), en una construcción geométrica denominada *División de un segmento en media y extrema razón*. La idea es muy sencilla: El todo se divide en dos partes tal que, la razón entre la parte menor y la mayor, es igual a la existente entre la mayor y el total, es decir, la suma de ambas. En un segmento de longitud unidad tenemos



De la definición $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$, de donde $x^2+x-1=0$, ecuación de 2º grado de soluciones $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, tomando la solución positiva, la razón de la proporción es:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2\left(-1-\sqrt{5}\right)}{\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(-1-\sqrt{5}\right)}=\frac{-2\left(1+\sqrt{5}\right)}{(-1)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{-2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$$

que se lee como fi y se conoce por nº áureo, como vemos es un número irracional de valor aproximado $\approx 1.61803398874989\ldots$

ATENCIÓN: ϕ es la solución positiva de la ecuación $x^2-x-1=0$.

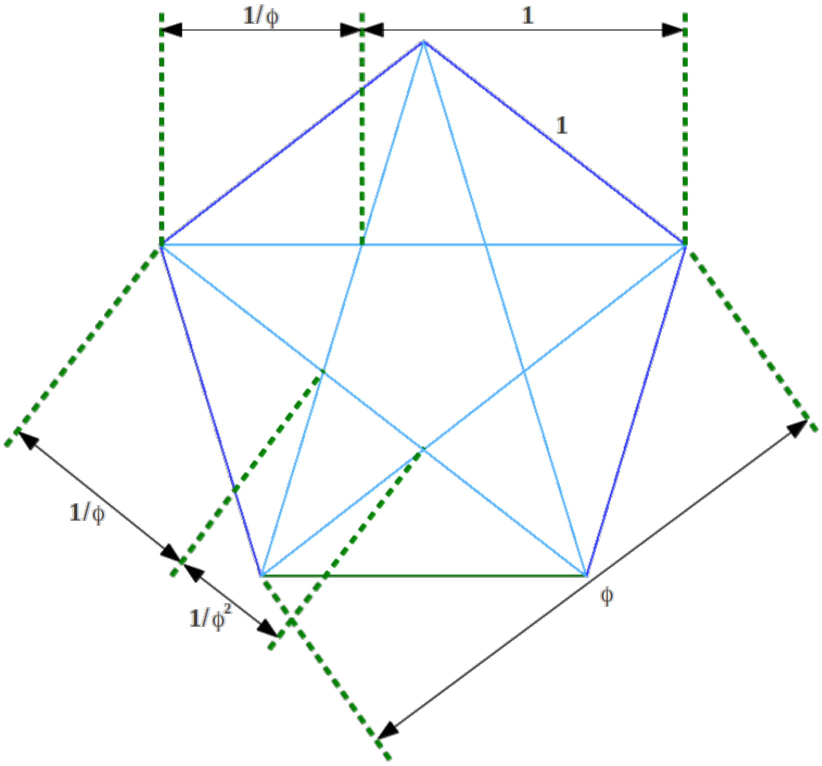
De la definición, se deduce que ϕ verifica las dos relaciones siguientes:

$$\phi^2=1+\phi\ (\phi=\sqrt{1+\phi});\qquad \phi=1+\frac{1}{\phi}$$

que aplicadas "indefinidamente" nos llevan a estas otras versiones para ϕ

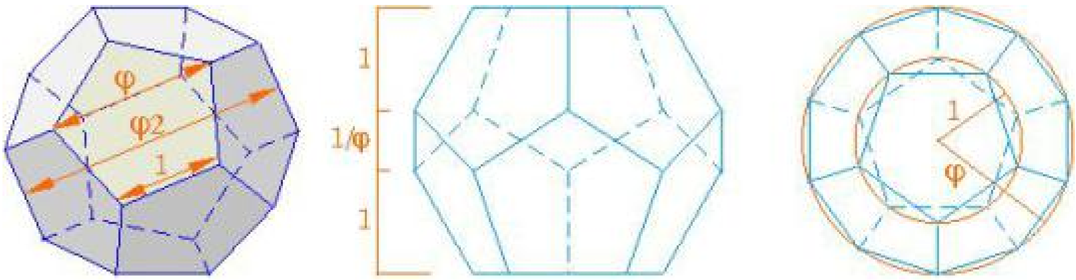
$$\phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

El número de oro se encuentra, especialmente, en el pentágono:



Un poco de historia:

Platón (c. 428-347 a. C.) vivió antes de que Euclides estudiara el número áureo y a pesar de lo discutible de su conocimiento sobre el número áureo, Platón se ocupó de estudiar el origen y la estructura del cosmos, cosa que intentó usando los cinco sólidos platónicos. Para Platón, cada uno de los sólidos correspondía a una de las partículas que conformaban cada uno de los elementos: la tierra estaba asociada al cubo, el fuego al tetraedro, el aire al octaedro, el agua al icosaedro, y finalmente el Universo como un todo, estaba asociado con el dodecaedro, que está fuertemente relacionado con ϕ.



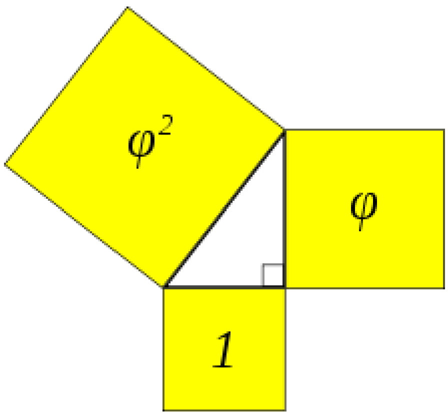
En 1509 el matemático y teólogo italiano Luca Pacioli publicó *De Divina Proportione* (La Divina Proporción), donde plantea cinco razones por las que estima apropiado considerar divino al número áureo:

En 1525, Alberto Durero publicó *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*, donde describe cómo trazar con regla y compás la espiral áurea basada en la sección áurea, que se conoce como "espiral de Durero".

El astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) desarrolló un modelo platónico del Sistema Solar utilizando los sólidos platónicos, y se refirió al número áureo en términos grandiosos.

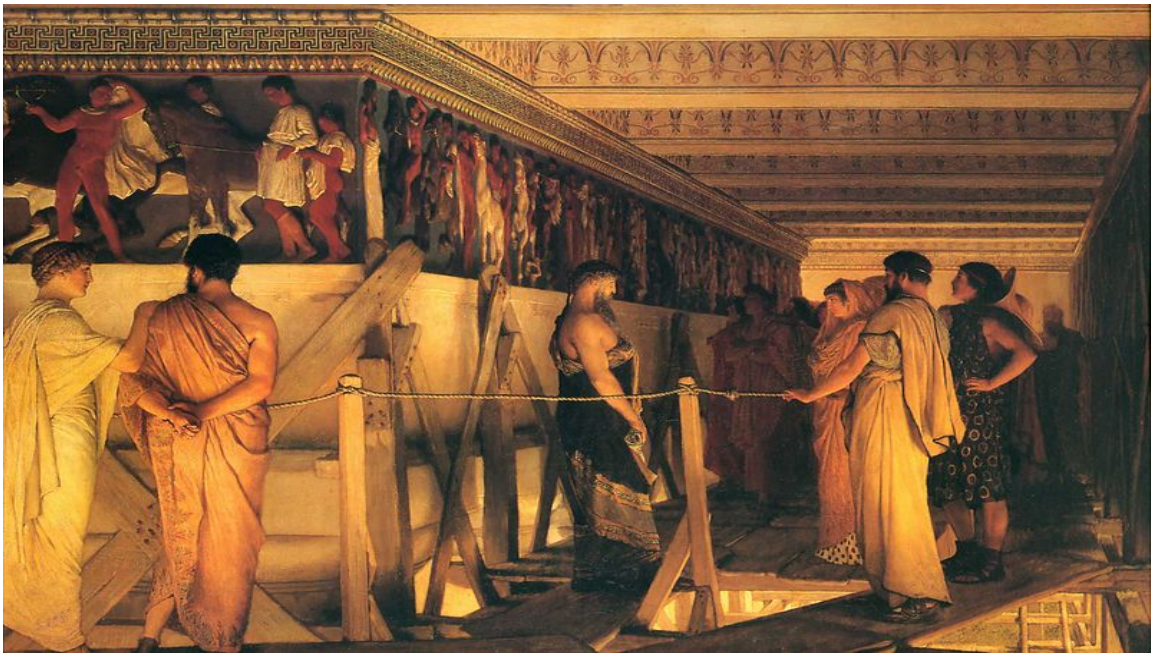
"*La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa*".
Johannes Kepler en *Mysterium Cosmographicum* (*El misterio cósmico*).

Kepler aunó ambos tesoros en un triángulo rectángulo (conocido como triángulo de Kepler)



El primer uso conocido del adjetivo áureo, dorado, o de oro, para referirse a este número lo hace el matemático alemán Martin Ohm, hermano del célebre físico Georg Simon Ohm, en la segunda edición de 1835 de su libro *Die Reine Elementar Matematik* (*Las matemáticas puras elementales*).

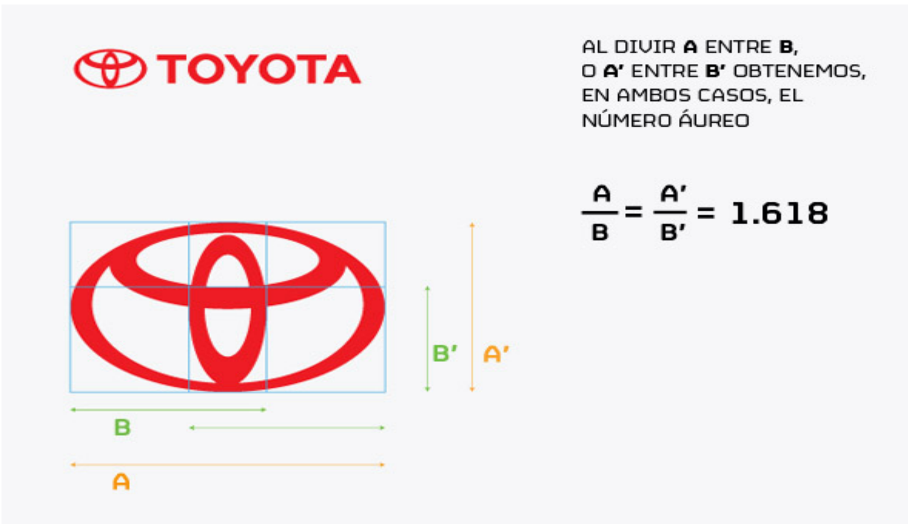
En los textos de matemáticas que trataban el tema, el símbolo habitual para representar el número áureo fue $\boldsymbol{\tau}$, del griego *τομή*, que significa 'corte o sección'. Sin embargo, la moderna denominación $\boldsymbol{\phi}$ o $\boldsymbol{\varphi}$ la efectuó en 1900 el matemático Mark Barr en honor a Fidias, ya que ésta era la primera letra de su nombre escrito en griego (Φειδίας). Este honor se le concedió a Fidias por el máximo valor estético atribuido a sus esculturas, propiedad que ya por entonces se le atribuía también al número áureo.



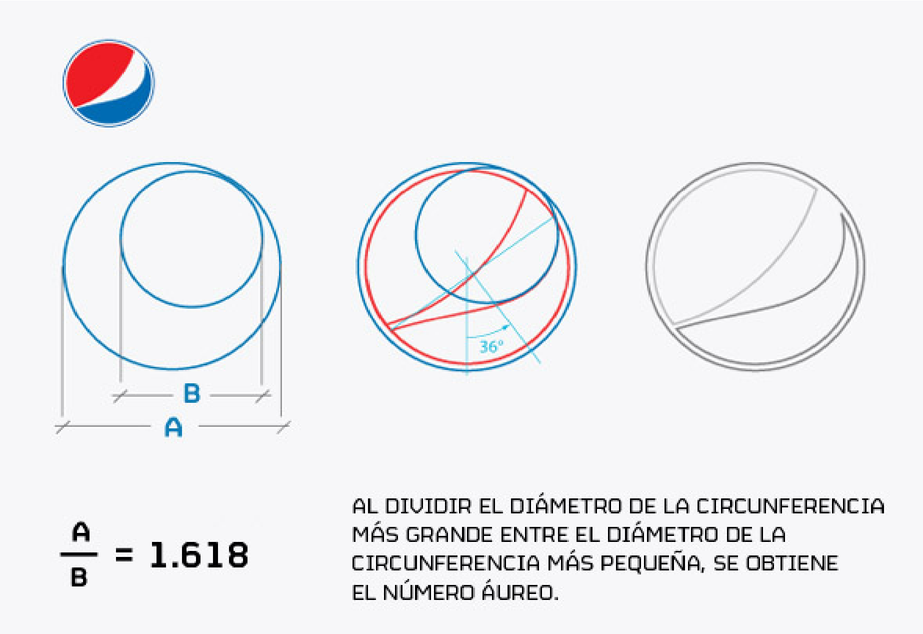
Fidias mostrando el friso del Partenón a sus amigos (1868) Representación artística de Fidias hecha por el pintor neerlandés Sir Lawrence Alma-Tadem

Algunas aplicaciones:

Una idea más extendida es que la belleza podría consistir en las proporciones armoniosas de las dimensiones. Creyendo que la proporción áurea ayudará a crear diseños estéticamente más agradables, muchos diseñadores han optado por aplicar esta relación a la construcción de sus logotipos. Veamos un par de ejemplos:



Y el nuevo logotipo de Pepsi, diseñado por the Arnell Group en 2008, también presenta la divina proporción entre las dos circunferencias que lo conforman.



Si nos fijamos en otros campos del diseño, en la industria del automóvil también nos encontramos ejemplos de su utilización. En la página web de **Aston Martin**, el coche del agente secreto 007, James Bond, desde que apareció por primera vez en la película "*Goldfinger*" (1964), hasta la que es la última entrega en la actualidad, "*Skyfall*" (2012), a la espera de la última entrega "*SPECTRE*" previsto su estreno en 2015. (Aquí James Bond, contará**,** con tres nuevos y rutilantes vehículos. Serán el prototipo C-X75 de Jaguar, el Range Rover Sport SVR y el Defender Big Foot de Land Rover. Con el prototipo C-X75 de Jaguar se rodará una espectacular persecución del protagonista, interpretado de nuevo por Daniel Craig. que recorrerá las calles de Roma junto al Aston Martin DB10). En esta página se afirma que la utilización de la razón áurea en los diseños de los coches Aston Martin es uno de los elementos que contribuye a su perfección,… "*la razón áurea está en el corazón de cada Aston Martin*".

James Bond, interpretado por Sean Connery, montó su primer Aston Martin en el film "Goldfinger"

Si navegamos por la web de Aston Martin tres son los modelos en los que se indica explícitamente que se ha hecho uso de la divina proporción en su diseño, el modelo *Rapide S* (2013-2015), el nuevo modelo *DB9* (2014) y el modelo *V8 Vantage* (2013).

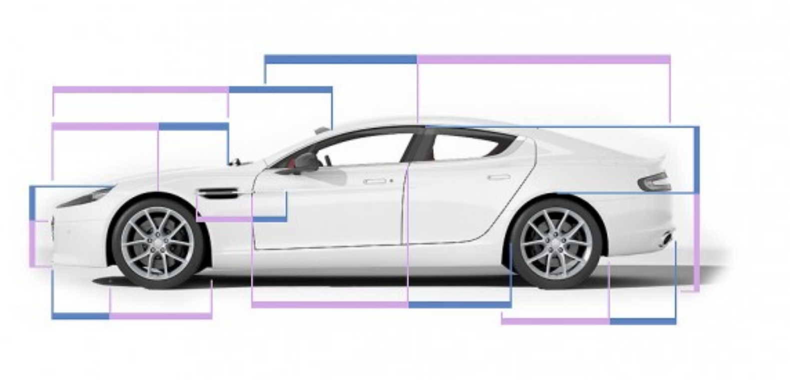
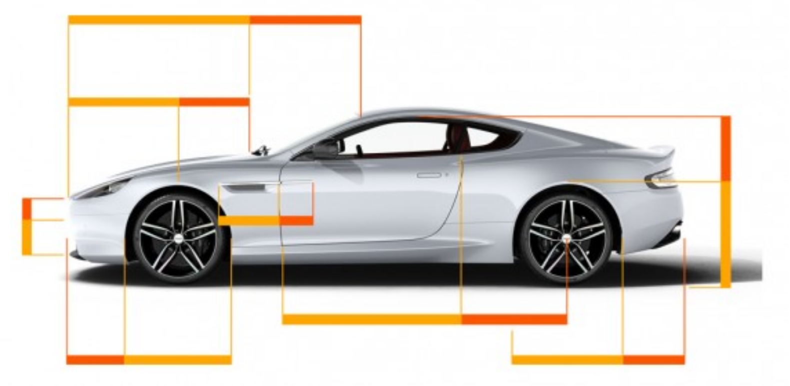


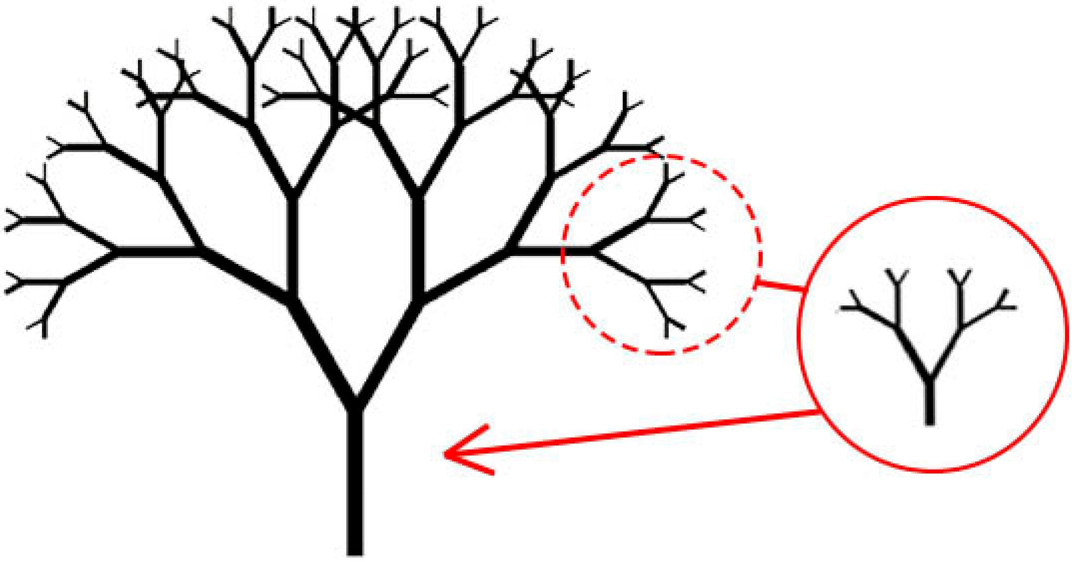
Imagen del modelo Rapide S de Aston Martin que aparece en su página web, indicando las proporciones áureas en el diseño exterior de este modelo

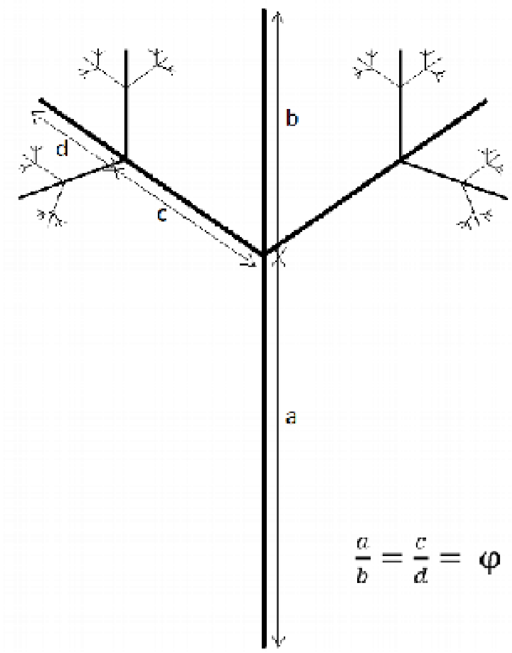


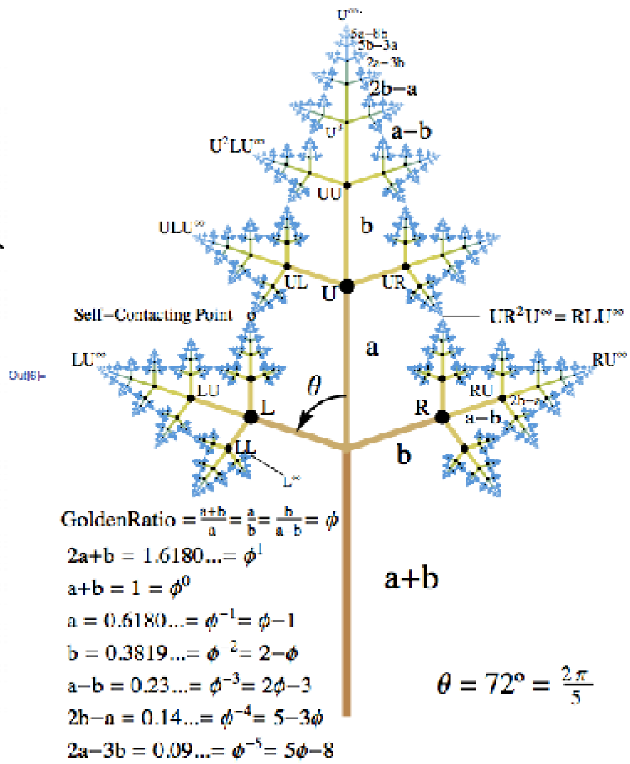
Las proporciones áureas en el diseño exterior del nuevo modelo DB9 de Aston Martin, según aparece en la página web de la compañía Aston Martin

No es el único caso, en el mundo del automóvil, el Dodge Viper, está diseñado siguiendo esta razón áurea, que muchos elevan a un nivel, que roza lo místico.

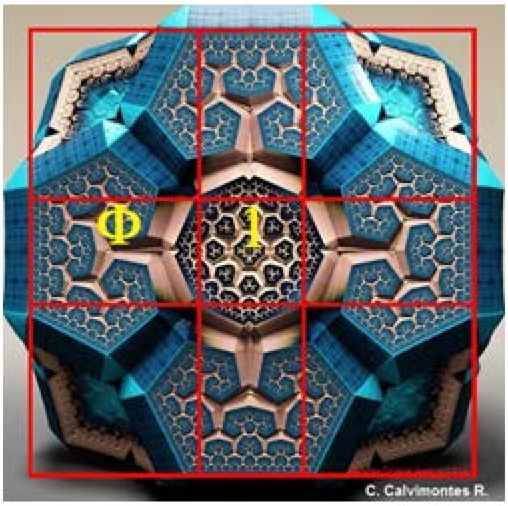
En un campo más matemático, el de los fractales (Un **fractal** es un objeto geométrico cuya estructura básica, se repite a diferentes escalas) se puede ver la huella del número de oro







Otro en 3D, que no está bien documentada su relación con el número áureo, es el de Fabergé



Primeras propiedades y su relación con la Geometría

Es fácil ver los siguientes resultados relativos al número de oro:

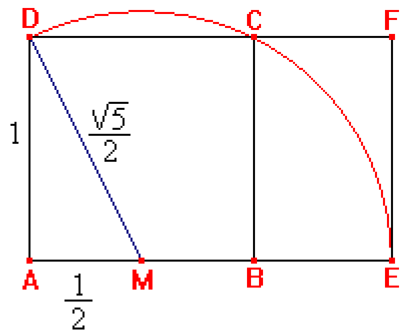
a) $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$; b) $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$; c) $\phi + \phi^2 = \phi \,.\, \phi^2$; d) $\phi^3 = \frac{\phi + 1}{\phi - 1}$

e) $\phi^2 = 1 + \phi$; $\phi^3 = 1 + 2\phi$; $\phi^4 = 2 + 3\phi$; $\phi^5 = 3 + 5\phi$; $\phi^6 = 5 + 8\phi$; $\phi^7 = 8 + 13\phi$;
$\phi^8 = 13 + 21\phi$,...

NOTA: Prestar atención a los coeficientes de las potencias de ϕ

La figura plana que mejor representa la idea de proporción en el plano es el rectángulo. El **rectángulo áureo** es aquel que tiene la medida de sus lados en esa proporción.

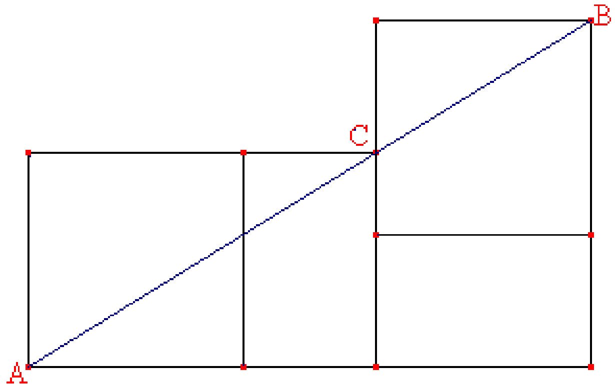
Una forma de construir el rectángulo áureo es partir de un cuadrado ABCD, por el punto medio M de uno de sus lados, se traza el segmento que lo une con uno de los vértices del lado opuesto, D, que se abate circularmente sobre la prolongación del lado AB obteniéndose así el lado mayor del rectángulo siendo el menor el lado del cuadrado



A lo largo de la Historia, ha sido la Geometría Euclídea quien ha marcado las líneas maestras en cualquier proyecto de edificación. El uso de esta geometría implica algo esencial: que los números se puedan "dibujar", o construir con regla y compás para que pueda ser la medida de un segmento o el cociente entre las medidas de dos de ellos en caso de hablar de proporción.

En 1876, Gustav Theodor Fechner, inventor de la psicología física, estudió las ideas de belleza e hizo experimentos en su laboratorio sobre las preferencias de gente corriente sin ningún aprendizaje estético. Pidió a numerosas personas que escogieran entre diferentes rectángulos aquél cuya forma les agradase más. Los rectángulos que resultaron mayoritariamente elegidos fueron los que tenían proporciones similares a las del rectángulo áureo.

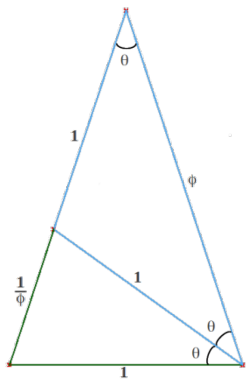
Una propiedad importante de los rectángulos áureos es que cuando se colocan dos iguales, como se indica en la figura, la diagonal AC pasa por el vértice B.



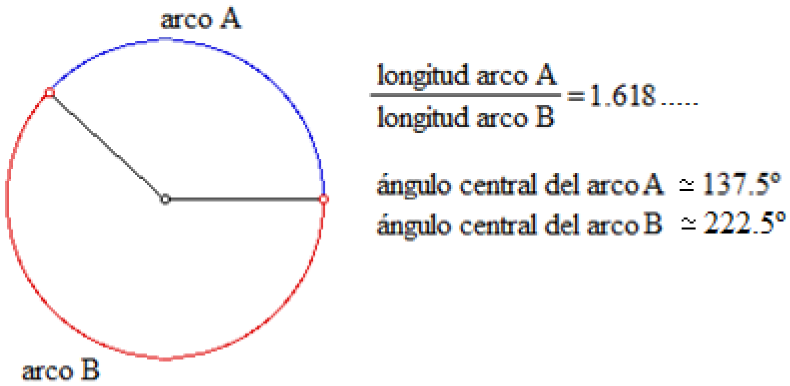
(NOTA: En realidad el tamaño del D.N.I. español, que, coincide con las dimensiones de las tarjetas de crédito comúnmente utilizadas, es de 85,60 mm de ancho x 53,98 mm de alto, con lo cual su razón es 1.585772508...).

Generalizaciones a otras figuras

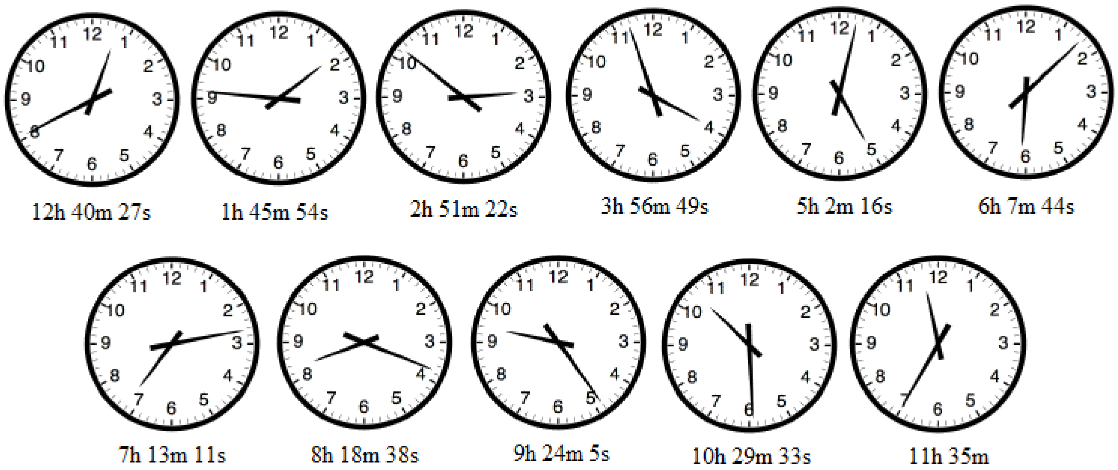
Se llama **triángulo áureo mayor** a un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales midan 36º y el ángulo desigual 108º (de lados 1, 1 y ϕ). Es un gnomon del triángulo siguiente (En geometría, un **gnomon** es cualquier figura que, añadida a una figura original, produce una figura semejante a la original. El gnomon de un rectángulo áureo es un cuadrado de lado igual a la dimensión mayor del mismo). Un triángulo isósceles de ángulos 36º, 72º, 72º se llama **áureo menor** (de lados 1, 1 y $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$)



Si se divide la circunferencia en dos arcos en la proporción áurea, el ángulo central más pequeño es 137.5077639...º ó 137º 30´27.9´´ y el más grande es 222.4922361...º ó 222º 29´32´´ (**ángulos áureos menor y mayor**)

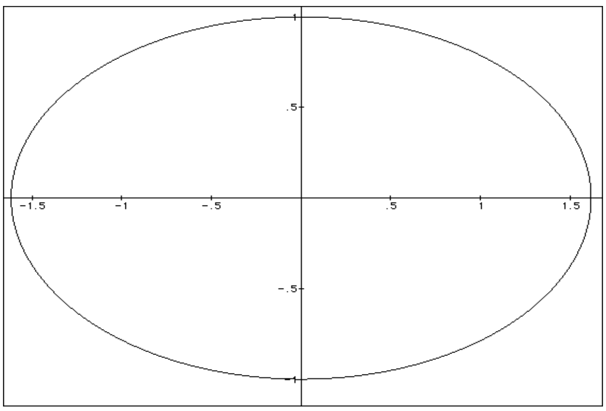


Como curiosidad, en las siguientes 11 horas las agujas del reloj forman un ángulo áureo mayor (**horas áureas mayores**)

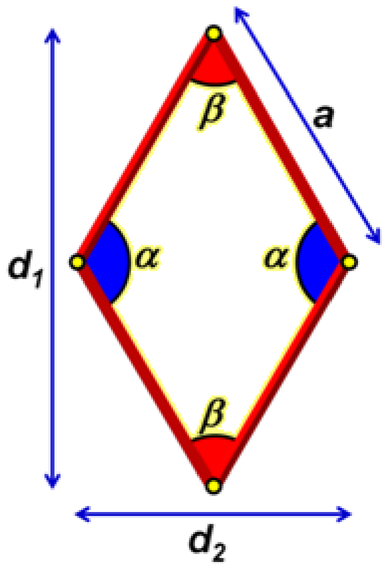


Mientras que las **horas áureas menores** serían, respectivamente: 12h 25m; 1h 30m 27s; 2h 35m 55s; 3h 41m 22s; 4h 46m 49s; 5h 52m 16s; 6h 57m 44s; 8h 3m 11s; 9h 8m 38s; 10h 14m 6s y 11h 19m 33s

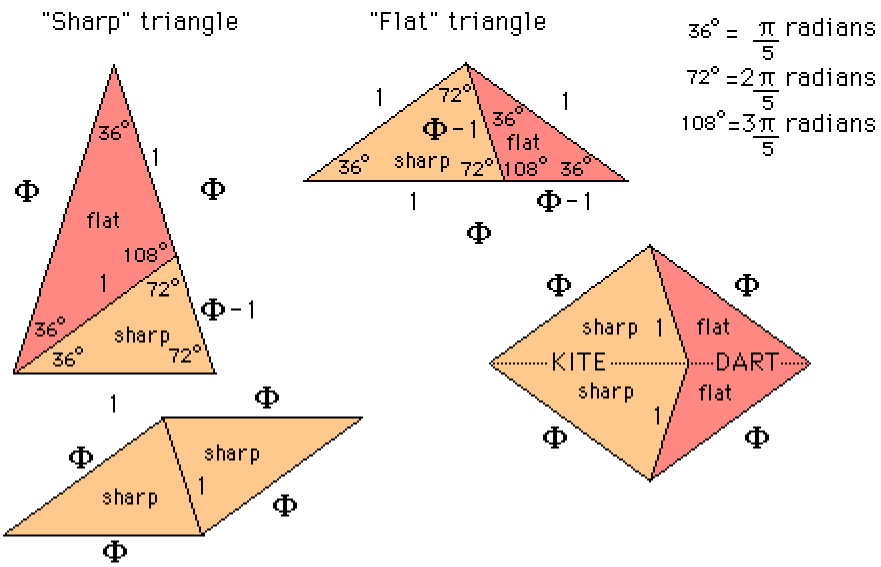
También podemos construir una **elipse áurea**. Esta elipse tiene los dos ejes en la razón áurea.



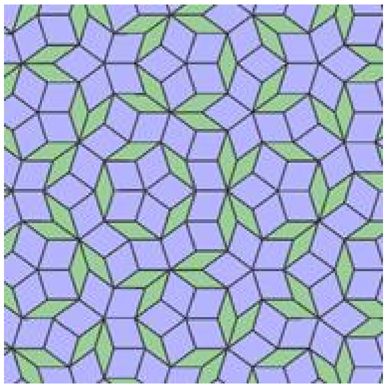
y un **rombo áureo** que será aquel cuyas diagonales $\frac{d_1}{d_2} = \phi$ estén en la proporción áurea



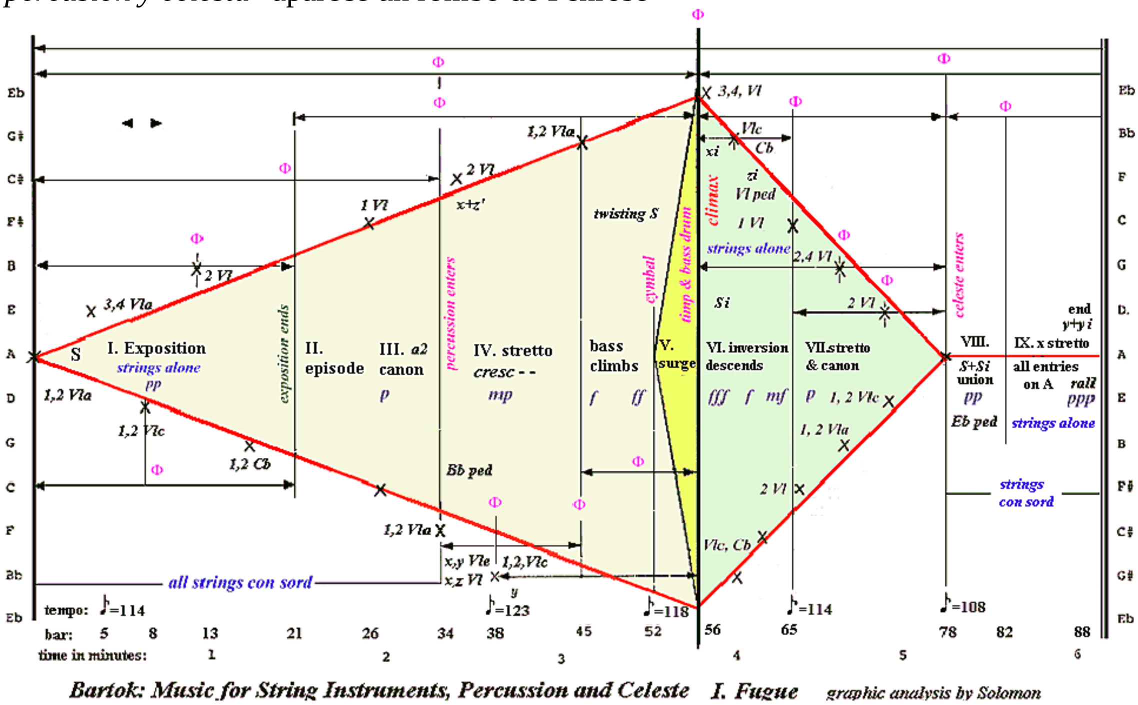
Actualmente, el físico y matemático británico Roger Penrose ha desarrollado una teselación de rombos no periódica que incorpora la idea de la sección dorada y una simetría basada en reflejar cinco veces los rombos en diferentes direcciones. La red se compone de dos tipos de rombos, unos con ángulos de 36º y 144º, y otros con ángulos de 72º y 108º



Cuando se tesela un plano atendiendo a las direcciones de Penrose, la proporción de rombos del primer tipo frente a los segundos es justo el número de oro.

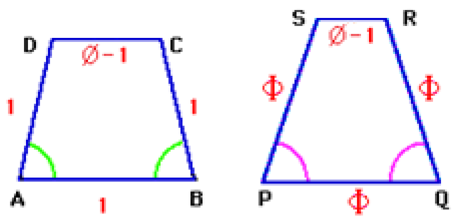


También en el análisis de la obra de Bela Bartok "*Música para Instrumentos de cuerda, percusión y celesta"* aparece un rombo de Penrose



Tenemos dos **trapecios áureos**, que son unos trapecios isósceles que tienen, el primero, tres lados de longitud 1 y el cuarto de longitud ϕ y el segundo, isósceles también, que tiene tres lados de longitud ϕ y el cuarto de longitud 1.

Pero hay también otros dos trapecios isósceles que están relacionados con ϕ, a saber, el que tiene tres lados de longitud 1 y el cuarto de longitud $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ y el que tiene tres lados de longitud ϕ y el cuarto de longitud $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$, respectivamente.



Éstos últimos trapecios tienen la siguiente propiedad, si se les añade un triángulo isósceles arriba, que prolongan los lados iguales del trapecio, éstos tienen por lados iguales ϕ y 1, respectivamente.