Normalmente, en los programas y libros de Bachillerato, se introduce el concepto de límite funcional y, a continuación, se explica la técnica para hallar límites de diferentes funciones. Más adelante se aplica este concepto para saber si una función es continua en un punto, para hallar la derivada y, finalmente, para definir el concepto de integral definida. En resumidas cuentas, la idea de límite funcional es el pilar básico donde se sustenta todo el Análisis Matemático.

En esta sesión trabajaremos con límites pero en un campo no muy habitual en los libros de texto y en las clases de Matemáticas; me refiero a la utilización de los límites funcionales en la resolución de algunos problemas de Geometría.

Antes de pasar a la resolución de dichos problemas, y como recordatorio, definiremos algunos conceptos que serán necesarios posteriormente.

**Definición:** Decimos que $f(x)$ es un **infinitésimo** cuando $x \to a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Así, por ejemplo, $x^2 - 4$ es infinitésimo cuando $x \to \pm 2$, $\operatorname{sen} x$ es infinitésimo cuando $x \to 0$, $\ln x$ es infinitésimo cuando $x \to 1$, etc…

**Definición:** Dados dos infinitésimos $f(x)$, $g(x)$ cuando $x \to a$ se dicen **infinitésimos equivalentes** si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. En ese caso lo expresamos del siguiente modo:

$$\begin{array}{c} f(x) \approx g(x) \\ x \to a \end{array}$$

Así, por ejemplo, $\begin{array}{c} \operatorname{sen} x \approx x \\ x \to 0 \end{array}$ pues $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

(Nota: Este último límite se calcula fácilmente aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 \text{ )}$$

**Proposición:** Si dos infinitésimos son equivalentes y uno de ellos aparece en un límite como factor o divisor, puede sustituirse por el otro.

La demostración de esta proposición es muy sencilla. Supongamos que:

$$\underset{x \to a}{f(x) \approx g(x)}$$, lo que implica $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

y que $g(x)$ aparece en un límite como factor; por ejemplo:

$$\lim_{x\to a}[h(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a}\left[h(x)\cdot \frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a}[h(x)\cdot f(x)]$$

La sustitución de un infinitésimo por otro equivalente no elimina directamente las indeterminaciones, pero, si el segundo infinitésimo tiene una expresión más simple que el primero, habremos dado un paso hacia delante para hallar el valor del límite.

Hay muchos infinitésimos equivalentes, pero los más habituales son los siguientes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\underset{x\to 0}{\operatorname{sen} x \approx x}$ | $\underset{x\to 0}{\operatorname{tag} x \approx x}$ | $\underset{x\to 0}{\operatorname{arcsen} x \approx x}$ | $\underset{x\to 0}{\operatorname{arctag} x \approx x}$ |
| $\underset{x\to 0}{1 - \cos x \approx x^2/2}$ | $\underset{x\to 0}{\ln(1+x) \approx x}$ | $\underset{x\to 0}{e^x - 1 \approx x}$ | $\underset{x\to 0}{a^x - 1 \approx x \ln a}$ |

Así, si queremos calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\operatorname{sen}(3x)}$, procederemos del modo siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1}{3xe^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{3xe^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{3e^{2x}} = \frac{4}{3}$$

También es interesante recordar la regla de L¨Hôpital para el caso de la indeterminación $\frac{0}{0}$ a la que se ha hecho referencia anteriormente.

**Primera regla de L´Hôpital**: Sean dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ que se anulan simultáneamente en $x = a$ y que además, en un entorno reducido de a, son derivables y $g(x) \neq 0$. En esta situación si existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además son iguales; es decir: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

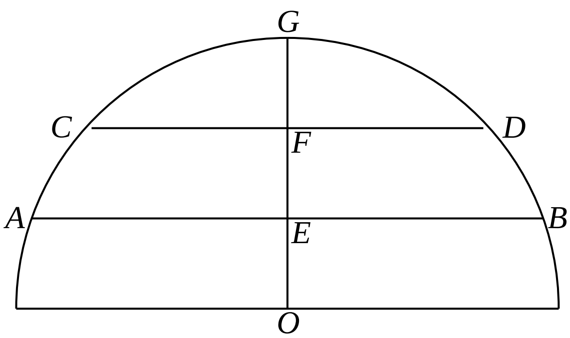
La combinación de esta regla junto con la sustitución de algún infinitésimo por otro equivalente, nos simplifica el cálculo de numerosos límites. Por ejemplo:

$$\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{tagx-x}{xtag^2 x}=\frac{0}{0}=\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{tagx-x}{x^3}=\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{1}{3\cos^2 x}\cdot\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}=$$

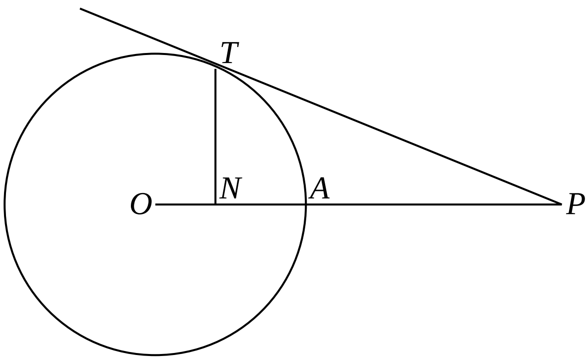
$$=\frac{1}{3}\cdot\underset{x\to 0}{lím}\ (1+\cos x)\cdot\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2}{3}\cdot\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{2}{3}\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{x^2}{2x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

Ahora estamos ya en condiciones de resolver los cinco problemas siguientes:

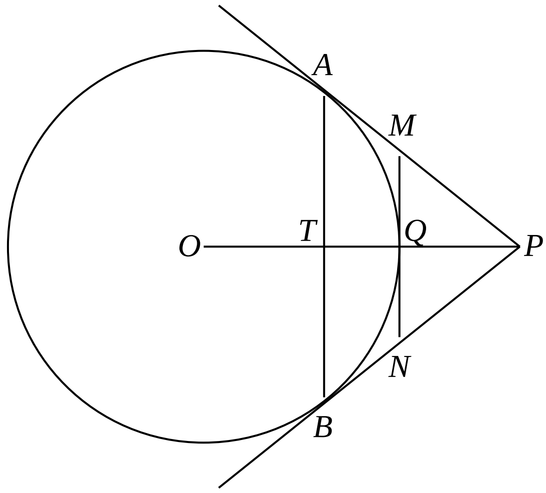
**Problema 1:** Consideremos un semicírculo y en él las cuerdas paralelas al diámetro, *AB* y *CD*. Sea *OG* un radio perpendicular a las cuerdas que corta a dichas cuerdas en *E* y *F*, cumpliéndose siempre $EF = FG$. Prueba que se cumple: $\underset{OE\to r}{lím}\ \frac{AB}{CD}=\sqrt{2}$




**Problema 2:** El segmento lineal *OP* une el centro de una circunferencia *O* con el punto *P*, que se halla fuera de aquella. Desde éste trazamos una tangente *PT* a la circunferencia. Del punto *T* bajamos una perpendicular, *TN*, sobre la recta *OP*. El punto de intersección de la recta *OP* con la circunferencia es *A*. Demuestra que los segmentos *AP* y *AN* son infinitésimos equivalentes cuando el punto *P* tiende al punto *A*.



**Problema 3:** En los puntos extremos y medio del arco *AB* de una circunferencia se han trazado las tangentes y los puntos *A* y *B* se han unido mediante su cuerda. Demuestra que la razón de las áreas de los triángulos resultantes tiende a 4, cuando el punto *A* tiende al punto *B*.




**Problema 4**: Se dan dos circunferencias de centros *O* y *O´* y radios *R* y *r* tangentes en *A*. Por un punto *B* de la tangente común se trazan las otras dos tangentes *BC* y *BC´* siendo *C* y *C´* los puntos de contacto. Demuestra que el límite del cociente de las áreas de los triángulos *ABC* y *ABC´* cuando el punto *B* tiende al punto *A*, es igual a *r/R*.

**Problema 5**: Uno de los catetos $AB = c$ de un triángulo rectángulo es constante y el otro cateto $AC = b$ es variable. Consideremos la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC* y llamemos *S* al área del segmento circular cuya cuerda es *AC*. Demuestra que el límite del cociente $S/b^3$ cuando *b* tiende a cero es igual a $1/(6c)$.