

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

# Mosaicos modulares

Taller de Talento Matemático, 4<sup>o</sup> ESO y Bachillerato

Antonio M. Oller  
José María Muñoz

25 de abril de 2014

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Dados dos enteros  $a$  y  $n$ , existen enteros  $c$  y  $r$  únicos, con  $0 \leq r < n$  tales que:

$$a = cn + r.$$

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Dados dos enteros  $a$  y  $n$ , existen enteros  $c$  y  $r$  únicos, con  $0 \leq r < n$  tales que:

$$a = cn + r.$$

$r$  es el resto de  $a$  módulo  $n$  y se escribe

$$a \equiv r \pmod{n}.$$

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Dados dos enteros  $a$  y  $n$ , existen enteros  $c$  y  $r$  únicos, con  $0 \leq r < n$  tales que:

$$a = cn + r.$$

$r$  es el resto de  $a$  módulo  $n$  y se escribe

$$a \equiv r \pmod{n}.$$

Por ejemplo, diremos que

$$29 \equiv 5 \pmod{8}.$$

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Si  $a \equiv r_1 \pmod{n}$  y  $b \equiv r_2 \pmod{n}$ , entonces:

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Si  $a \equiv r_1 \pmod{n}$  y  $b \equiv r_2 \pmod{n}$ , entonces:

$$a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{n}.$$

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Si  $a \equiv r_1 \pmod{n}$  y  $b \equiv r_2 \pmod{n}$ , entonces:

$$a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{n}.$$

$$ab \equiv r_1 r_2 \pmod{n}.$$

Mosaicos  
 modulares

Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

Baldosas, 1ª  
 parte

Baldosas, 2ª  
 parte

Si  $a \equiv r_1 \pmod{n}$  y  $b \equiv r_2 \pmod{n}$ , entonces:

$$a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{n}.$$

$$ab \equiv r_1 r_2 \pmod{n}.$$

Por ejemplo,

$$16 + 24 \equiv 2 + 3 \pmod{7}.$$

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Si  $a \equiv r_1 \pmod{n}$  y  $b \equiv r_2 \pmod{n}$ , entonces:

$$a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{n}.$$

$$ab \equiv r_1 r_2 \pmod{n}.$$

Por ejemplo,

$$16 + 24 \equiv 2 + 3 \pmod{7}.$$

$$12 \cdot 34 \equiv 2 \cdot 4 \pmod{10}.$$

Si  $a \equiv r_1 \pmod{n}$  y  $b \equiv r_2 \pmod{n}$ , entonces:

$$a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{n}.$$

$$ab \equiv r_1 r_2 \pmod{n}.$$

Por ejemplo,

$$16 + 24 \equiv 2 + 3 \pmod{7}.$$

$$12 \cdot 34 \equiv 2 \cdot 4 \pmod{10}.$$

Podemos hacer tablas de sumar y de multiplicar

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Tabla de sumar módulo 4:

<b>+</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>0</b>	0	1	2	3
<b>1</b>	1	2	3	0
<b>2</b>	2	3	0	1
<b>3</b>	3	0	1	2

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Tabla de multiplicar módulo 4:

$\times$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>0</b>	0	0	0	0
<b>1</b>	0	1	2	3
<b>2</b>	0	2	0	2
<b>3</b>	0	3	2	1

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Recordar que si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  ó  $b = 0$ .

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

¿Es cierto que si  $ab \equiv 0 \pmod{n}$ , entonces  $a \equiv 0 \pmod{n}$   
ó  $b \equiv 0 \pmod{n}$ ?

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

¿Es cierto que si  $ab \equiv 0 \pmod{n}$ , entonces  $a \equiv 0 \pmod{n}$   
ó  $b \equiv 0 \pmod{n}$ ?

NO. Por ejemplo  $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{6}$ .

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Un número  $a$  se dice divisor de cero módulo  $n$  si existe  $b \not\equiv 0 \pmod{n}$  tal que  $ab \equiv 0 \pmod{n}$ .

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

¿Qué debe cumplir un entero  $a$  para que sea divisor de cero módulo  $n$ ?

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

¿Qué debe cumplir un entero  $a$  para que sea divisor de cero módulo  $n$ ?

Debe cumplirse que  $\text{m.c.d.}(a, n) \neq 1$

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

¿Qué debe cumplir un entero  $a$  para que sea divisor de cero módulo  $n$ ?

Debe cumplirse que  $\text{m.c.d.}(a, n) \neq 1$

Por ejemplo, los divisores de cero módulo 12 son

2, 3, 4, 6, 8, 9, 10

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Vamos a hacer las tablas de multiplicar  
módulo 2, 3, 4, 5 y 6.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Queremos construir mosaicos a partir de las tablas de multiplicar módulo  $n$ .

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Queremos construir mosaicos a partir de las tablas de multiplicar módulo  $n$ .

Para ello:

- 1 Asignaremos una baldosa a cada resto módulo  $n$ .

Queremos construir mosaicos a partir de las tablas de multiplicar módulo  $n$ .

Para ello:

- 1 Asignaremos una baldosa a cada resto módulo  $n$ .
- 2 De la tabla de multiplicar módulo  $n$ , tacharemos la fila y la columna de ceros.

Queremos construir mosaicos a partir de las tablas de multiplicar módulo  $n$ .

Para ello:

- 1 Asignaremos una baldosa a cada resto módulo  $n$ .
- 2 De la tabla de multiplicar módulo  $n$ , tacharemos la fila y la columna de ceros.
- 3 Sustituiremos cada número de la tabla por su correspondiente baldosa.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas,  $1^a$   
parte

Baldosas,  $2^a$   
parte

Queremos construir mosaicos a partir de las tablas de multiplicar módulo  $n$ .

Para ello:

- 1 Asignaremos una baldosa a cada resto módulo  $n$ .
- 2 De la tabla de multiplicar módulo  $n$ , tacharemos la fila y la columna de ceros.
- 3 Sustituiremos cada número de la tabla por su correspondiente baldosa.
- 4 Repetiremos el motivo obtenido para cubrir todo el plano.

# Qué vamos a hacer

Mosaicos modulares

Antonio M. Oller  
José María Muñoz

Recordatorio de aritmética modular

Baldosas, 1ª parte

Baldosas, 2ª parte

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1



0



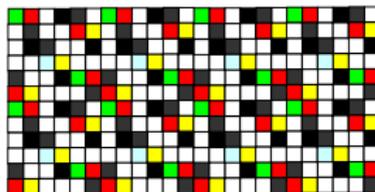
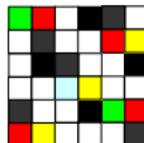
1



2



3



Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Las baldosas que elegiremos no van a ser arbitrarias.  
Exigiremos algunas condiciones:

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Las baldosas que elegiremos no van a ser arbitrarias.  
Exigiremos algunas condiciones:

- 1 Las baldosas son cuadradas, de dimensiones  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ . . . y están divididas a su vez en celdas cuadradas más pequeñas

Las baldosas que elegiremos no van a ser arbitrarias.  
Exigiremos algunas condiciones:

- 1 Las baldosas son cuadradas, de dimensiones  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ . . . y están divididas a su vez en celdas cuadradas más pequeñas
- 2 Las baldosas se colorearán pintando las celdas de blanco o de negro.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Las baldosas que elegiremos no van a ser arbitrarias.  
Exigiremos algunas condiciones:

- 1 Las baldosas son cuadradas, de dimensiones  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ . . . y están divididas a su vez en celdas cuadradas más pequeñas
- 2 Las baldosas se colorearán pintando las celdas de blanco o de negro.
- 3 Las baldosas serán simétricas respecto de ambas diagonales.

Las baldosas que elegiremos no van a ser arbitrarias.  
Exigiremos algunas condiciones:

- ① Las baldosas son cuadradas, de dimensiones  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ . . . y están divididas a su vez en celdas cuadradas más pequeñas
- ② Las baldosas se colorearán pintando las celdas de blanco o de negro.
- ③ Las baldosas serán simétricas respecto de ambas diagonales.
- ④ Siempre existirá una baldosa negra y una baldosa blanca.

Las baldosas que elegiremos no van a ser arbitrarias.  
 Exigiremos algunas condiciones:

- ① Las baldosas son cuadradas, de dimensiones  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ . . . y están divididas a su vez en celdas cuadradas más pequeñas
- ② Las baldosas se colorearán pintando las celdas de blanco o de negro.
- ③ Las baldosas serán simétricas respecto de ambas diagonales.
- ④ Siempre existirá una baldosa negra y una baldosa blanca.
- ⑤ Para el resto de baldosas siempre ocurre que la mitad de las casillas de cada baldosa serán blancas y la otra mitad, negras.

# ¡A trabajar!

Vamos a CONSTRUIR las baldosas de tamaño  $2 \times 2$ .

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

# ¡A trabajar!

Mosaicos modulares

Antonio M. Oller  
 José María Muñoz

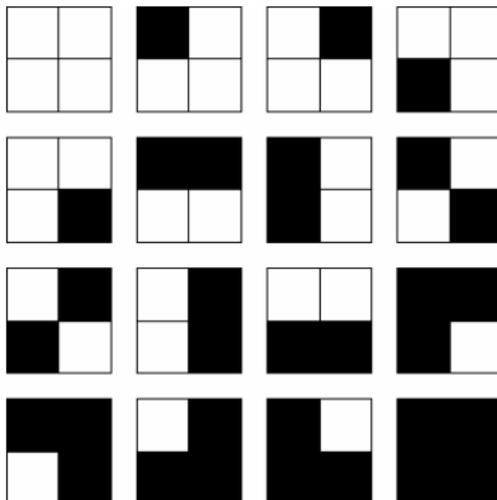
Recordatorio de aritmética modular

Baldosas, 1ª parte

Baldosas, 2ª parte

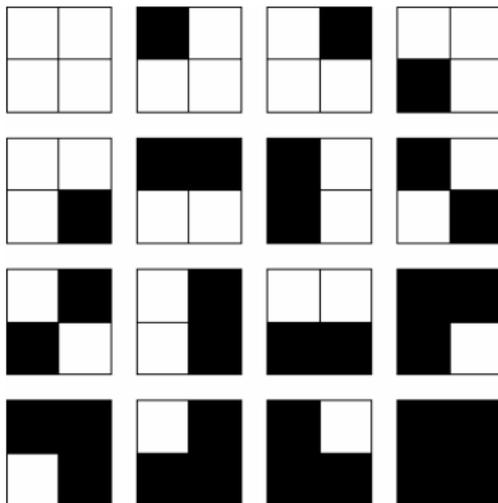
Vamos a CONSTRUIR las baldosas de tamaño  $2 \times 2$ .

Estas son todas las maneras de colorear baldosas  $2 \times 2$ :



Vamos a CONSTRUIR las baldosas de tamaño  $2 \times 2$ .

Pero deben ser simétricas respecto a ambas diagonales:



# ¡A trabajar!

Mosaicos  
 modulares

Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

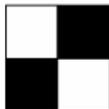
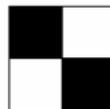
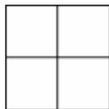
Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

Baldosas, 1ª  
 parte

Baldosas, 2ª  
 parte

Vamos a CONSTRUIR las baldosas de tamaño  $2 \times 2$ .

Por tanto, las baldosas de tamaño  $2 \times 2$  son:



# Asignando las baldosas

Construidas las baldosas, hemos de fijar algunos criterios a la hora de asignar cada una de ellas a un resto módulo  $n$ :

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

# Asignando las baldosas

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Construidas las baldosas, hemos de fijar algunos criterios a la hora de asignar cada una de ellas a un resto módulo  $n$ :

- 1 Cada número tendrá asignada una baldosa distinta a la de los demás.

# Asignando las baldosas

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Construidas las baldosas, hemos de fijar algunos criterios a la hora de asignar cada una de ellas a un resto módulo  $n$ :

- 1 Cada número tendrá asignada una baldosa distinta a la de los demás.
- 2 Al número cero se le asignará siempre la baldosa completamente negra.

# Asignando las baldosas

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Construidas las baldosas, hemos de fijar algunos criterios a la hora de asignar cada una de ellas a un resto módulo  $n$ :

- 1 Cada número tendrá asignada una baldosa distinta a la de los demás.
- 2 Al número cero se le asignará siempre la baldosa completamente negra.
- 3 Si un mismo número es a la vez su opuesto (por ejemplo, 2 módulo 4 ó 4 módulo 8) se le asigna la baldosa blanca.

# Asignando las baldosas

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Construidas las baldosas, hemos de fijar algunos criterios a la hora de asignar cada una de ellas a un resto módulo  $n$ :

- 1 Cada número tendrá asignada una baldosa distinta a la de los demás.
- 2 Al número cero se le asignará siempre la baldosa completamente negra.
- 3 Si un mismo número es a la vez su opuesto (por ejemplo, 2 módulo 4 ó 4 módulo 8) se le asigna la baldosa blanca.
- 4 Las baldosas asignadas a dos números opuestos; esto es, aquellos en los que su suma sea cero (por ejemplo, 3 y 1 módulo 4), serán baldosas complementarias.

Construidas las baldosas, hemos de fijar algunos criterios a la hora de asignar cada una de ellas a un resto módulo  $n$ :

- ① Cada número tendrá asignada una baldosa distinta a la de los demás.
- ② Al número cero se le asignará siempre la baldosa completamente negra.
- ③ Si un mismo número es a la vez su opuesto (por ejemplo, 2 módulo 4 ó 4 módulo 8) se le asigna la baldosa blanca.
- ④ Las baldosas asignadas a dos números opuestos; esto es, aquellos en los que su suma sea cero (por ejemplo, 3 y 1 módulo 4), serán baldosas complementarias. (Dos baldosas complementarias si las casillas blancas de una son las casillas negras de la otra y viceversa.)

Construidas las baldosas, hemos de fijar algunos criterios a la hora de asignar cada una de ellas a un resto módulo  $n$ :

- ① Cada número tendrá asignada una baldosa distinta a la de los demás.
- ② Al número cero se le asignará siempre la baldosa completamente negra.
- ③ Si un mismo número es a la vez su opuesto (por ejemplo, 2 módulo 4 ó 4 módulo 8) se le asigna la baldosa blanca.
- ④ Las baldosas asignadas a dos números opuestos; esto es, aquellos en los que su suma sea cero (por ejemplo, 3 y 1 módulo 4), serán baldosas complementarias. (Dos baldosas complementarias si las casillas blancas de una son las casillas negras de la otra y viceversa.)
- ⑤ Las baldosas asignadas a los divisores de cero serán además simétricas horizontal y verticalmente.

# ¡A trabajar!

Asigna las baldosas  $2 \times 2$  que acabas de construir a los restos módulo 3.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

# ¡A trabajar!

Mosaicos  
 modulares

Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

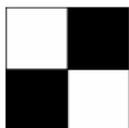
Baldosas, 1<sup>a</sup>  
 parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
 parte

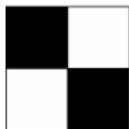
Asigna las baldosas  $2 \times 2$  que acabas de construir a los restos módulo 3.



$0 \pmod{3}$



$1 \pmod{3}$



$2 \pmod{3}$

# ¡A trabajar!

Asigna las baldosas  $2 \times 2$  que acabas de construir a los restos módulo 4.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

# ¡A trabajar!

Mosaicos  
 modulares

Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

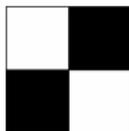
Baldosas, 1<sup>a</sup>  
 parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
 parte

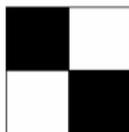
Asigna las baldosas  $2 \times 2$  que acabas de construir a los restos módulo 4.



$0 \pmod{4}$



$1 \pmod{4}$



$3 \pmod{4}$



$2 \pmod{4}$

Mosaicos  
modulares

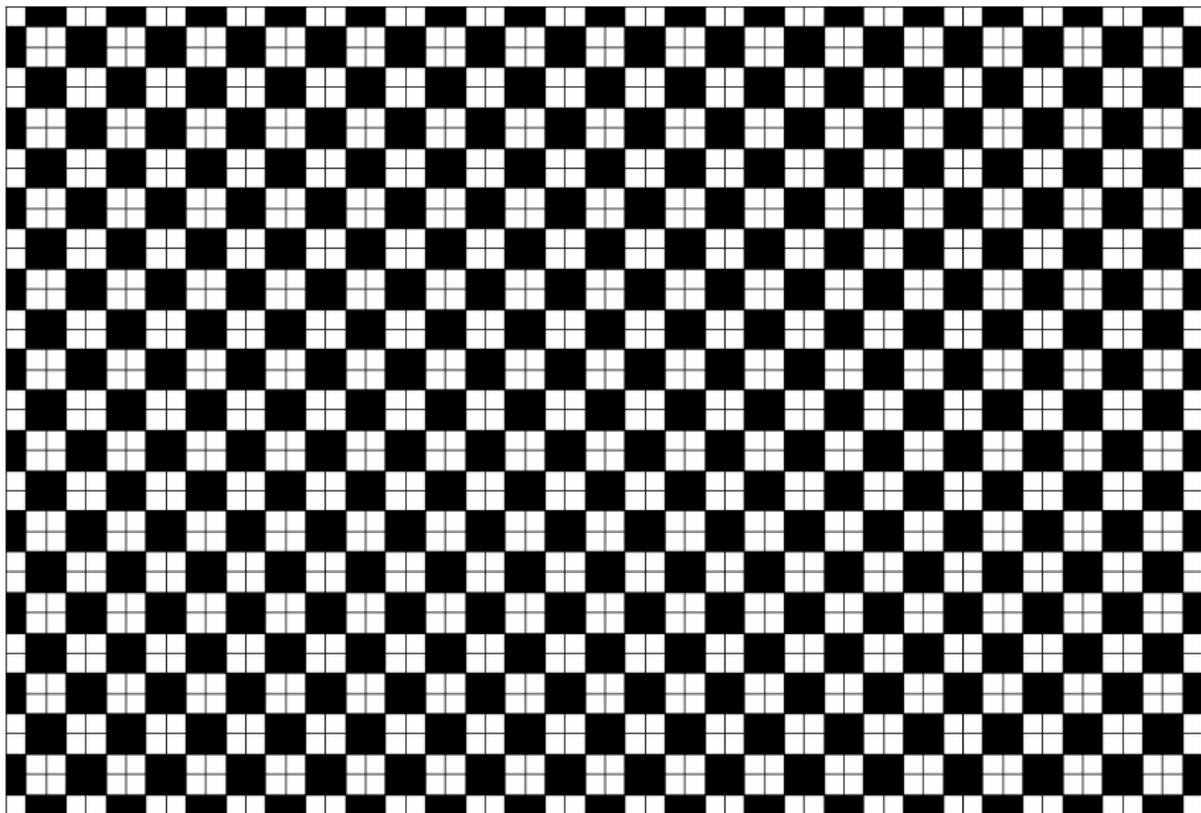
Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Con la asignación que habéis hecho, vamos a construir el mosaico correspondiente a la tabla de multiplicar módulo 3.



Mosaicos  
modulares

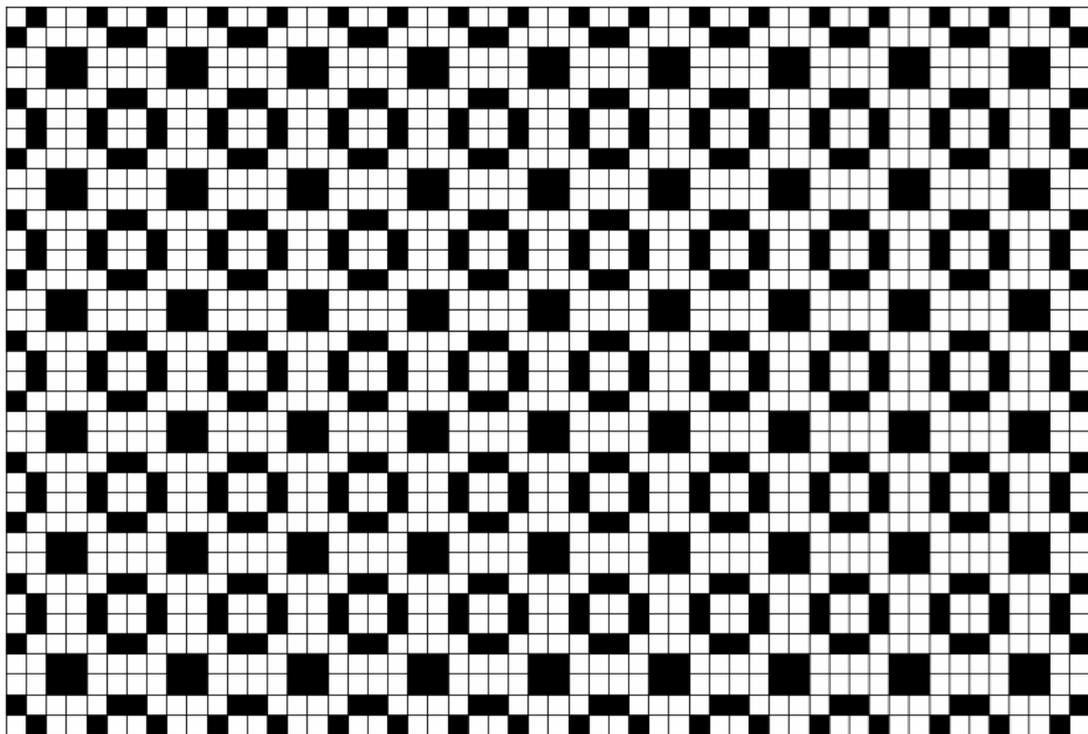
Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Con la asignación que habéis hecho, vamos a construir el mosaico correspondiente a la tabla de multiplicar módulo 4.



Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Con las baldosas que hemos construido ya no podemos realizar la asignación módulo 5, porque no hay suficientes. Necesitamos construir las baldosas de tamaño  $4 \times 4$  que cumplan las condiciones que hemos dicho antes.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Una forma es, como hicimos antes, dibujar TODAS las posibles baldosas  $4 \times 4$  y después descartar las que no cumplen nuestras condiciones.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Una forma es, como hicimos antes, dibujar TODAS las posibles baldosas  $4 \times 4$  y después descartar las que no cumplen nuestras condiciones.

¿Cuántas baldosas  $4 \times 4$  hay?

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Una forma es, como hicimos antes, dibujar TODAS las posibles baldosas  $4 \times 4$  y después descartar las que no cumplen nuestras condiciones.

¿Cuántas baldosas  $4 \times 4$  hay?

$$2^{16} (> 65,000)$$

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Una forma es, como hicimos antes, dibujar TODAS las posibles baldosas  $4 \times 4$  y después descartar las que no cumplen nuestras condiciones.

¿Cuántas baldosas  $4 \times 4$  hay?

$$2^{16} (> 65,000)$$

En general, hay  $2^{n^2}$  baldosas de tamaño  $n \times n$

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

Este proceso es demasiado largo. Vamos a idear una sistema  
que nos permita fabricar baldosas  
que ya cumplan las condiciones pedidas a partir de las baldosas  
que tenemos.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Supongamos que se tienen dos baldosas  $A$  y  $B$  de tamaños cualesquiera (por ejemplo  $n \times n$  y  $m \times m$  respectivamente), entonces se obtiene una nueva baldosa  $A \otimes B$  de tamaño  $mn \times mn$  mediante el siguiente procedimiento:

- 1 Cada celda negra de  $A$  se sustituye por una copia de  $B$ .

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Supongamos que se tienen dos baldosas  $A$  y  $B$  de tamaños cualesquiera (por ejemplo  $n \times n$  y  $m \times m$  respectivamente), entonces se obtiene una nueva baldosa  $A \otimes B$  de tamaño  $mn \times mn$  mediante el siguiente procedimiento:

- ① Cada celda negra de  $A$  se sustituye por una copia de  $B$ .
- ② Cada celda blanca de  $A$  se sustituye por una copia de la complementaria de  $B$ .

# Multiplicando baldosas. Ejemplo

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{white} & \text{black} \\ \hline \text{black} & \text{white} \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \text{black} & \text{white} \\ \hline \text{white} & \text{black} \\ \hline \end{array} =$$



# ¡A trabajar!

Vamos a construir utilizando este método todas las baldosas de tamaño  $4 \times 4$ . Para ellos vamos a multiplicar de todas las formas posibles las baldosas  $2 \times 2$  que tenemos.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

# ¡A trabajar!

Mosaicos  
 modulares

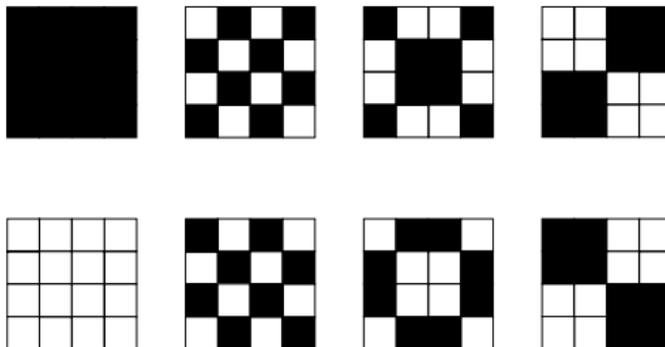
Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
 parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
 parte

Vamos a construir utilizando este método todas las baldosas de tamaño  $4 \times 4$ . Para ellos vamos a multiplicar de todas las formas posibles las baldosas  $2 \times 2$  que tenemos.



# Asignando módulo 5

Mosaicos modulares

Antonio M. Oller  
 José María Muñoz

Recordatorio de aritmética modular

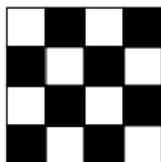
Baldosas, 1ª parte

Baldosas, 2ª parte

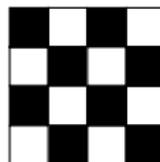
La asignación módulo 5 de las baldosas que acabamos de construir es:



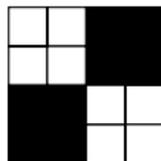
$0 \pmod{5}$



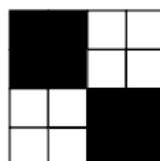
$1 \pmod{5}$



$4 \pmod{5}$



$2 \pmod{5}$



$3 \pmod{5}$

Mosaicos  
modulares

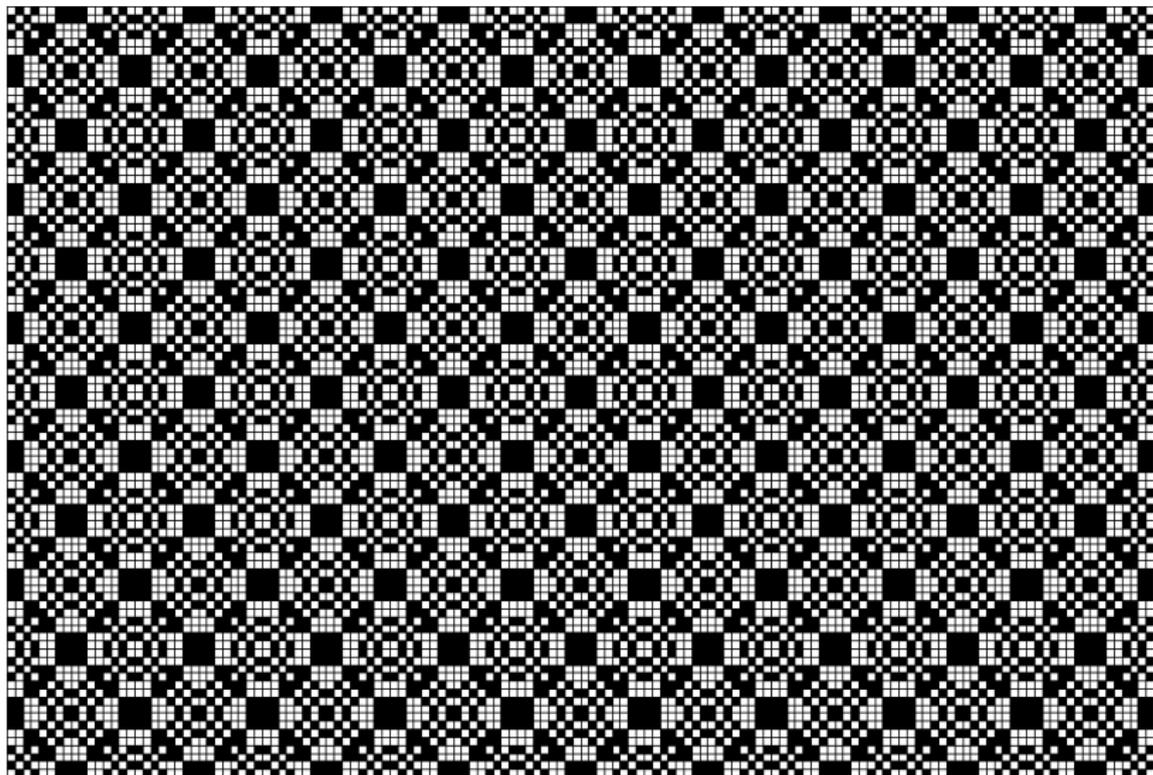
Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Con la asignación que habéis hecho, vamos a construir el mosaico correspondiente a la tabla de multiplicar módulo 5.



# Asignando módulo 6

Mosaicos  
 modulares

Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

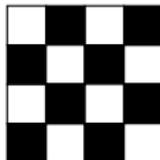
Baldosas, 1ª  
 parte

Baldosas, 2ª  
 parte

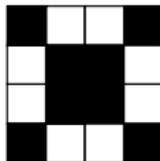
La asignación módulo 6 de las baldosas que acabamos de construir es:



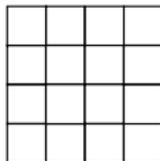
$0 \pmod{6}$



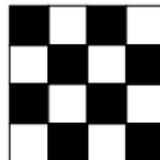
$1 \pmod{6}$



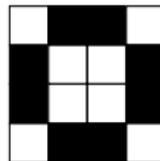
$2 \pmod{6}$



$3 \pmod{6}$



$5 \pmod{6}$



$5 \pmod{6}$

## Mosaicos modulares

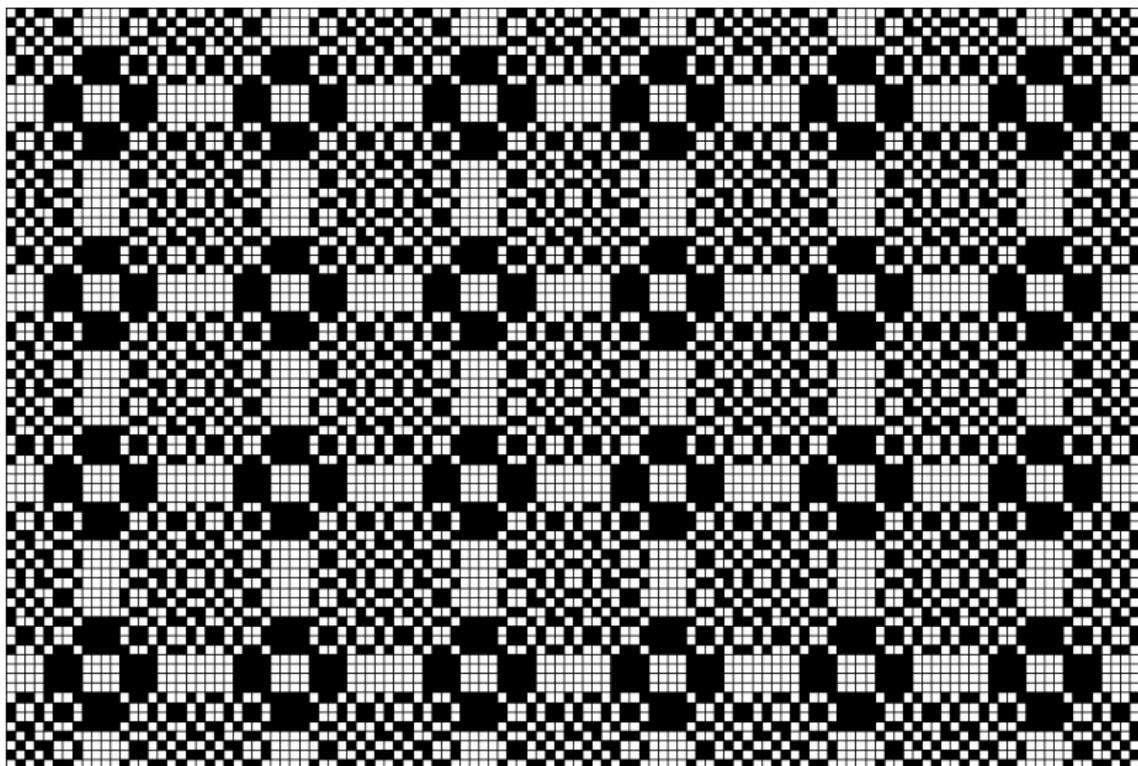
Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Con la asignación que habéis hecho, vamos a construir el mosaico correspondiente a la tabla de multiplicar módulo 6.



# Asignando módulo 8

Mosaicos  
 modulares

Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

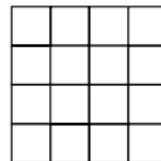
Baldosas, 1ª  
 parte

Baldosas, 2ª  
 parte

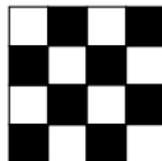
La asignación módulo 8 de las baldosas que acabamos de construir es:



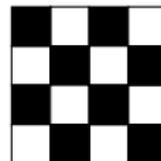
$0 \pmod{8}$



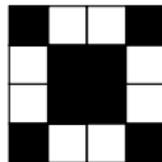
$4 \pmod{8}$



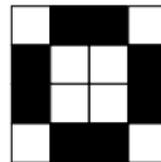
$1 \pmod{8}$



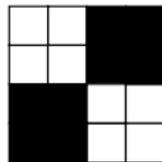
$7 \pmod{8}$



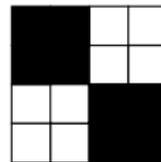
$2 \pmod{8}$



$6 \pmod{8}$



$3 \pmod{8}$



$5 \pmod{8}$

## Mosaicos modulares

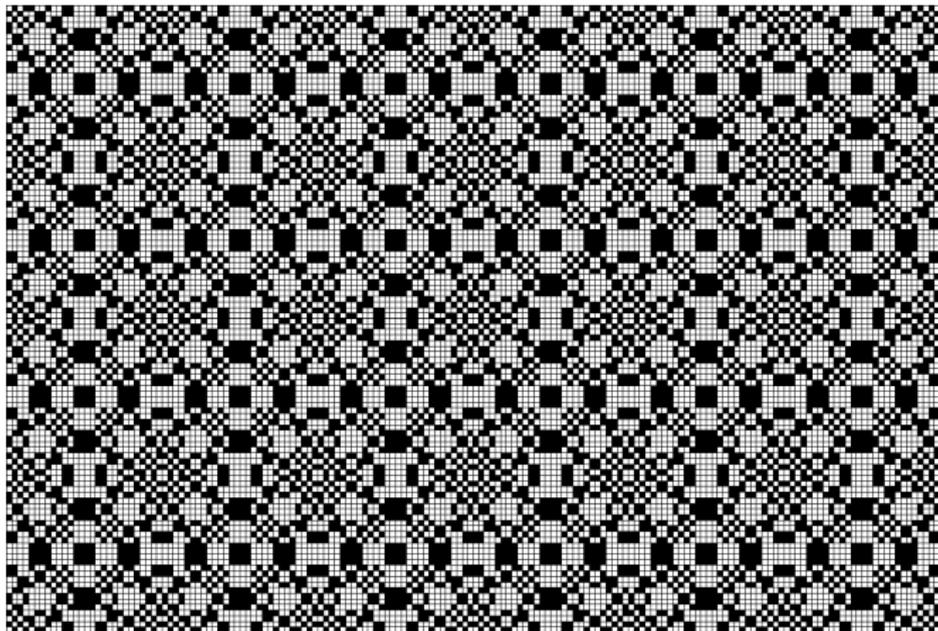
Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Con la asignación que habéis hecho, vamos a construir el mosaico correspondiente a la tabla de multiplicar módulo 8.



# Volvemos a necesitar más baldosas

Con las baldosas que hemos construido ya no podemos realizar la asignación módulo 7, ni módulo 9 o mayores. Necesitamos construir las baldosas de tamaño  $8 \times 8$  que cumplan las condiciones que hemos dicho antes.

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

# Volvemos a necesitar más baldosas

Con las baldosas que hemos construido ya no podemos realizar la asignación módulo 7, ni módulo 9 o mayores. Necesitamos construir las baldosas de tamaño  $8 \times 8$  que cumplan las condiciones que hemos dicho antes.

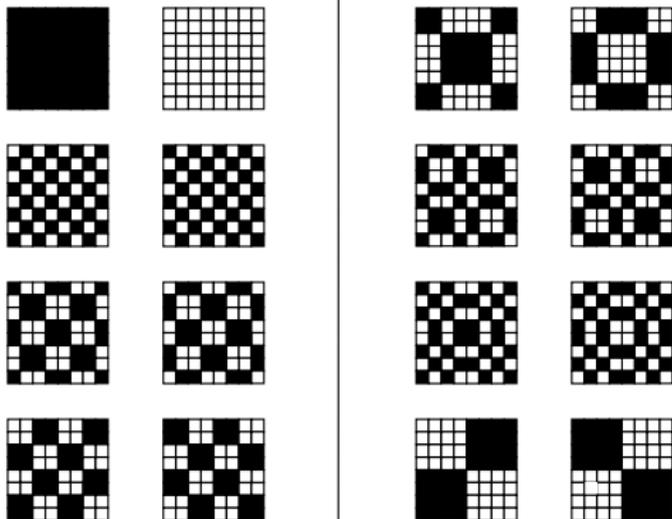
Mosaicos modulares

Antonio M. Oller  
 José María Muñoz

Recordatorio de aritmética modular

Baldosas, 1ª parte

Baldosas, 2ª parte



# Asignando módulo 7

Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

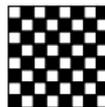
Baldosas, 1ª  
parte

Baldosas, 2ª  
parte

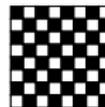
La asignación módulo 7 de las baldosas que acabamos de construir es:



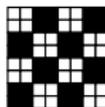
$0 \pmod{7}$



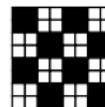
$1 \pmod{7}$



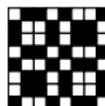
$6 \pmod{7}$



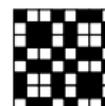
$2 \pmod{7}$



$5 \pmod{7}$



$3 \pmod{7}$



$4 \pmod{7}$

# Asignando módulo 9

Mosaicos  
 modulares

Antonio M.  
 Oller  
 José María  
 Muñoz

Recordatorio  
 de aritmética  
 modular

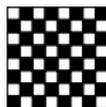
Baldosas, 1ª  
 parte

Baldosas, 2ª  
 parte

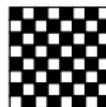
La asignación módulo 9 de las baldosas que acabamos de construir es:



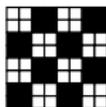
$0 \pmod{9}$



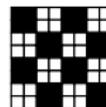
$1 \pmod{9}$



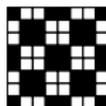
$8 \pmod{9}$



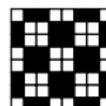
$2 \pmod{9}$



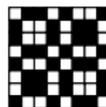
$7 \pmod{9}$



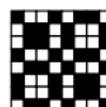
$3 \pmod{9}$



$6 \pmod{9}$



$4 \pmod{9}$



$5 \pmod{9}$

## Mosaicos modulares

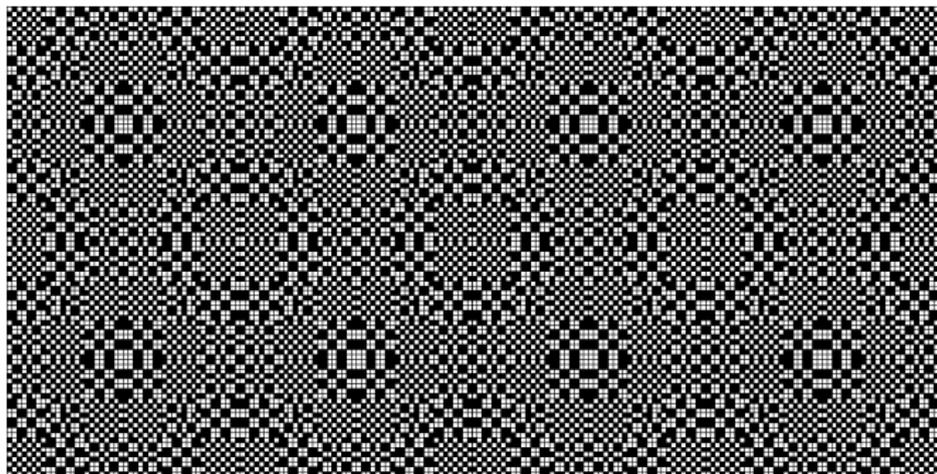
Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Con la asignación que habéis hecho, vamos a construir el mosaico correspondiente a la tabla de multiplicar módulo 7.



Mosaicos  
modulares

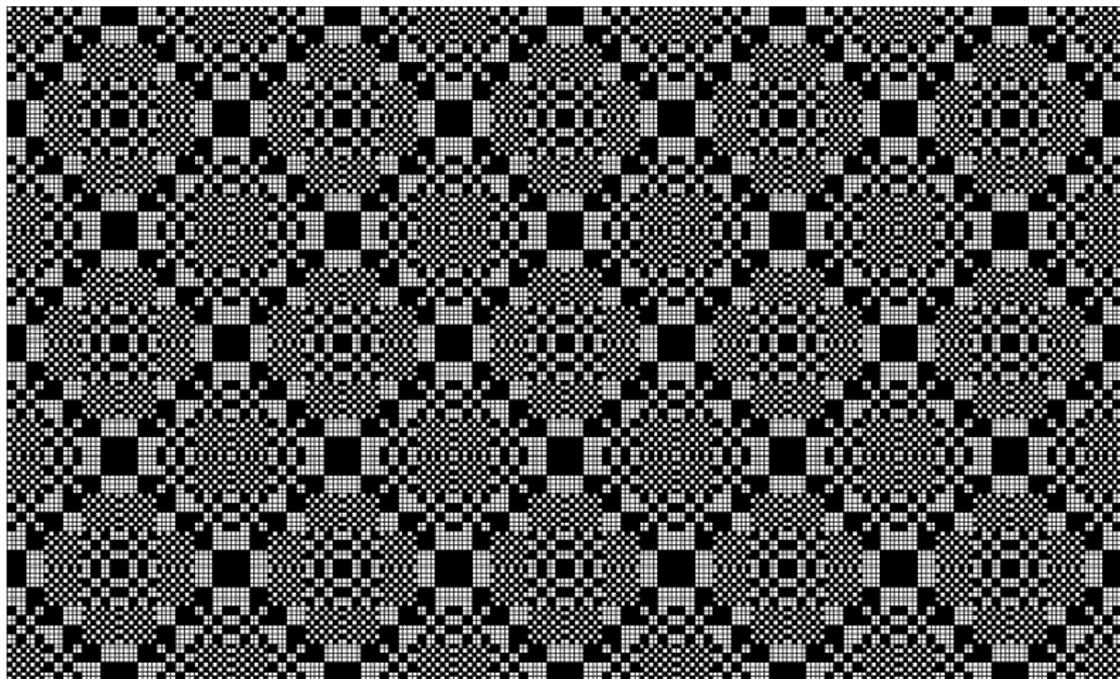
Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

Con la asignación que habéis hecho, vamos a construir el mosaico correspondiente a la tabla de multiplicar de las unidades módulo 9.



Mosaicos  
modulares

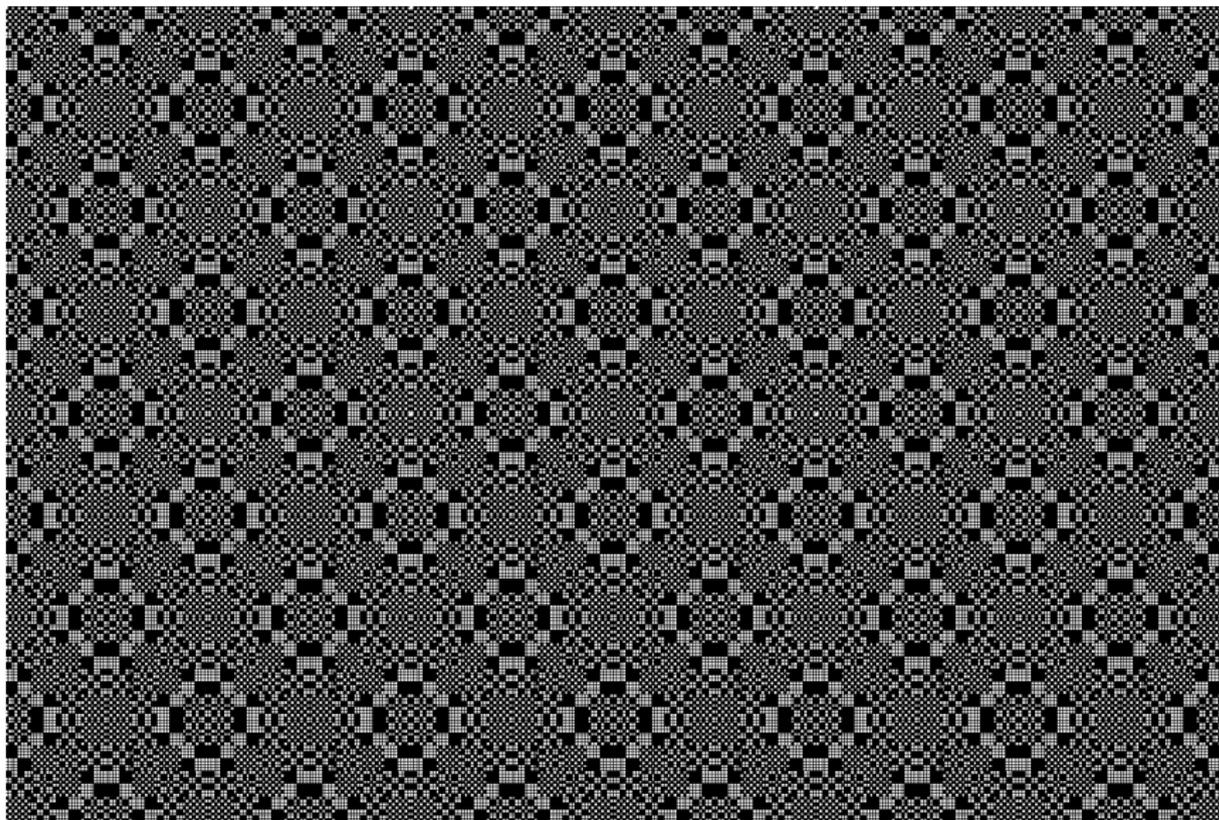
Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

El mosaico correspondiente a la tabla de multiplicar de las unidades módulo 16.



Mosaicos  
modulares

Antonio M.  
Oller  
José María  
Muñoz

Recordatorio  
de aritmética  
modular

Baldosas, 1<sup>a</sup>  
parte

Baldosas, 2<sup>a</sup>  
parte

*Muchas gracias  
por vuestra atención*