Soluciones alternativas al problema 3

Adrián Franco Rubio

15 de diciembre de 2013

Durante el Taller mencionamos que en muchos casos hay varias maneras de resolver un problema, no todas ellas igual de sencillas, pero válidas en cualquier caso. En concreto, un grupo de alumnos se propuso resolver el problema 3 por un camino alternativo, empleando discriminantes de ecuaciones de segundo grado. Veremos a continuación que efectivamente es posible llegar a una solución de esta manera. Enhorabuena por lo tanto a todos a los que se les ocurrió esa idea.

Reescribamos la ecuación como

$$x^2 + 2x - y(y+1) = 0$$

de modo que podamos verla como una ecuación de segundo grado en x con coeficientes dependientes de y. Si verdaderamente existe una solución (x, y) con x e y enteros positivos, en particular éstos satisfarán

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4y(y+1)}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1 + y(y+1)}$$

lo que obliga a que el radicando y^2+y+1 sea un cuadrado perfecto. Si conseguimos probar que esto no es posible, habremos resuelto el problema. Un posible truco para ello es llamar a^2 al cuadrado perfecto correspondiente ($a \in \mathbb{Z}$) y volver a plantear una ecuación de segundo grado:

$$y^2 + y + 1 - a^2 = 0$$

Despejamos ahora y:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a^2-1)}}{2}$$

Por el mismo argumento que antes el discriminante de la ecuación ha de ser un cuadrado perfecto, llamémosle b^2:

$$(2a)^2 - b^2 = 3$$

pero los únicos cuadrados perfectos que se diferencian en 3 son 1 y 4, lo que fuerza $a = \pm 1$ (otra manera de verlo es descomponer el primer miembro como suma por diferencia, y aprovechando que el 3 es primo y sólo se puede descomponer en dos factores enteros como $1 \cdot 3$ y $(-1) \cdot (-3)$, resolver los cuatro sistemas lineales posibles). Esto a su vez implica $y = 0$ o $y = -1$, ninguno de los cuales satisface nuestras condiciones.

De hecho, si decidimos interpretar la ecuación original como una ecuación de segundo grado en la variable y también podemos llegar a una solución. El procedimiento a seguir es muy similar:

$$y^2 + y - x(x+2) = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x(x+2)}}{2}$$

$$4x^2 + 8x + 1 - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 16(a^-1)}}{8}$$

$$16a^2 + 48 = b^2$$

A la vista de esta última ecuación es claro que b^2 es divisible por 16, de modo que ponemos $b = 4c$ y resulta:

$$a^2 + 3 = c^2$$

Por la misma razón que antes, $a = \pm 1$ y esto implica $x = 0$ o $x = -2$, ninguna de las cuales es una solución válida.
Emparentada con éstas existe una tercera solución (que en realidad estaría inspirada en la solución a otro problema relacionado de la misma colección de la Olympiade Française de Mathématiques) que resulta de completar cuadrados en los dos miembros de la ecuación:

$$(x+1)^2 - 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Multiplicando por 4 ambos miembros:

$$(2x+2)^2 - 4 = (2y+1)^2 - 1$$

$$(2x+2)^2 - (2y+1)^2 = 3$$

Seguro que el lector ya sabe seguir a partir de aquí.