Taller de Talento Matemático **Sesión 18/10/13**

Esther García

Problemas Olimpiada
Fase Local Aragón
Años: 2005, 2006, 2007 y 2008

SOLUCIONES: Tomadas de la página http://www.unizar.es/ttm/olimpiada/index.html

1. Sean **p** y **q** dos números naturales con $p \geq q$. Prueba que para todo número real positivo **x** se tiene que

$$(1+x^q)^p \geq (1+x^p)^q$$

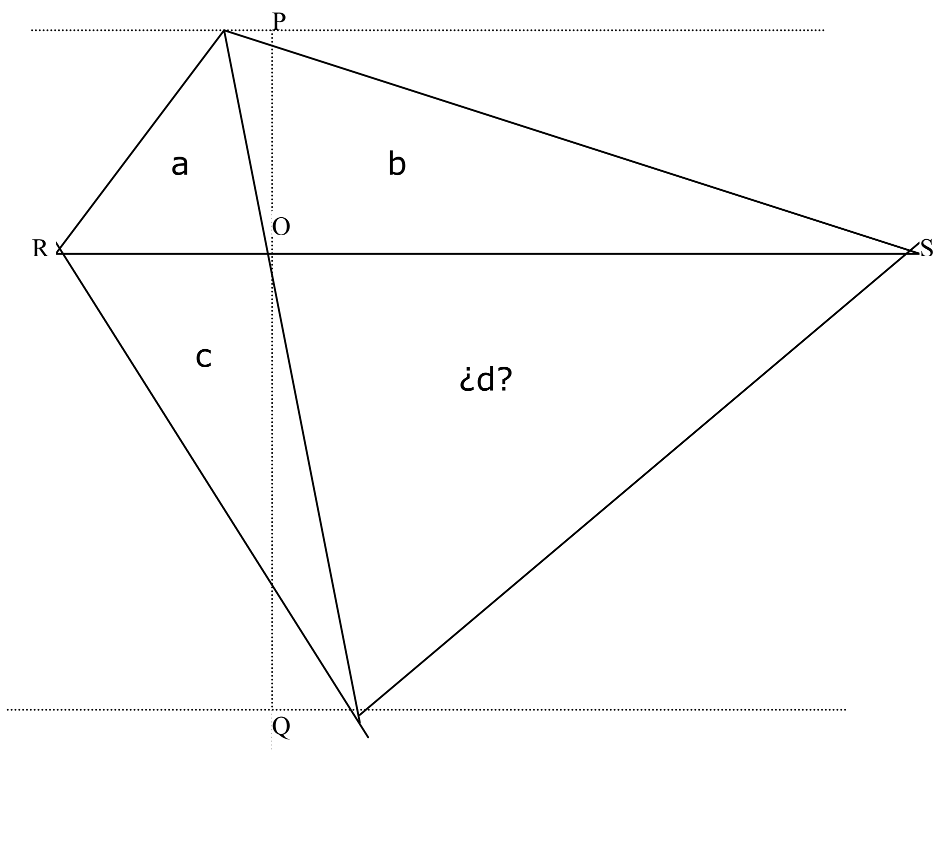
Solución: Si $0 \leq x \leq 1$, entonces $x^q \geq x^p$, luego

$$(1+x^q)^p \geq (1+x^p)^p \geq (1+x^p)^q \,.$$

Y si $x \geq 1$, $(1+x^q)^p = (x^q(1+(1/x)^q))^p = x^{pq}(1+(1/x)^q)^p$ que, por ser $0 < 1/x \leq 1$, ya sabemos que es mayor o igual que $x^{pq}(1+(1/x)^p)^q = (1+x^p)^q$.

2. Dado un cuadrilátero cualquiera, considera los cuatro triángulos que se forman al trazar sus diagonales. Si sabes el área de tres de estos triángulos, ¿cuál es el área del triángulo que falta?

Solución: Trazamos paralelas a una de las diagonales, y la perpendicular a dicha diagonal por el punto de corte de las dos diagonales, obteniendo la figura:



Las áreas de los cuatro triángulos son:

a = OP x OR /2 , b = OP x OS /2 , c = OQ x OR /2 , y

d = OQ x OS /2 . Luego **a x d = b x c** , y **d= (b x c)/a** .

3. Se suponen conocidas las raíces reales de las n ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuaciones	Raíces
$x^2 + a_1 x + b_1 = 0$	$x_0,\ x_1$
$x^2 + a_2 x + b_2 = 0$	$x_0,\ x_2$
…………………	……..
$x^2 + a_n x + b_n = 0$	$x_0,\ x_n$

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación: $x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} x + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = 0$

Solución: Puesto que x_0 y x_i son las raíces de la ecuación $x^2 + a_i x + b_i = 0$, se tiene $x^2 + a_i x + b_i = (x - x_0)\cdot(x - x_i)$, de donde $x_0 + x_i = -a_i$, $x_0 \cdot x_i = b_i$, para i = 1, . . . , n.
Sumando para i = 1, . . . , n se obtiene $nx_0 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = -(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$,
$x_0 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, luego $x_0 + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = -\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$,
$x_0 \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son x_0 y $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

4. Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

Solución: Sea V el número de vértices, A el número de aristas, D el número de diagonales sobre las caras, e I el número de diagonales interiores, que es el número a determinar.
Puesto que cada vértice del poliedro está exactamente en una cara cuadrada, el número de vértices es V = 4 × 12 = 48 vértices.
Puesto que de cada vértice salen exactamente 3 aristas, y cada arista une dos vértices, el número de aristas es $A = \frac{3V}{2} = 72$.
Como cada cuadrado tiene dos diagonales, cada hexágono tiene 9 y cada octógono tiene 20, hay D = 12 × 2 + 8 × 9 + 6 × 20 = 216 diagonales sobre las caras.
Así pues, el número pedido I es igual al total de segmentos que se pueden formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, menos el número de aristas y el número de diagonales sobre las caras: $I = \binom{48}{2} - A - D = 24 \cdot 47 - 72 - 216 = 840.$

5. Sea P una familia de puntos en el plano tal que por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

Solución: Fijamos tres puntos cualesquiera p1, p2, p3 de P. Existe una única circunferencia C que pasa por ellos: la circunferencia circunscrita al triángulo que forman. Dado cualquier otro punto p de P, hay una circunferencia que pasa por los puntos p1, p2, p3, p, y ésta ha de ser necesariamente C. Por tanto, todos los puntos de P están en C.

6. Halla las soluciones reales de la ecuación: $x \cdot \left(\dfrac{6-x}{x+1}\right) \cdot \left(\dfrac{6-x}{x+1} + x\right) = 8$

Solución: Sea $y = \dfrac{6-x}{x+1}$, lo que equivale a xy = 6 − (x + y). La ecuación del enunciado se convierte en xy(x + y) = 8, y sustituyendo xy por 6 − (x + y) queda $\big(6-(x+y)\big)\cdot\big(x+y\big) = 8$, que es una ecuación de grado 2 en x+y con soluciones x+y = 4 y x+y = 2.
Si x + y = 4, entonces xy = 2, esto es, x(6 − x) = 2(x + 1), o bien $x^2 - 4x + 2 = 0$, que tiene como raíces $2 \pm \sqrt{2}$.
Si x + y = 4, entonces xy = 4, esto es, x(6 − x) = 4(x + 1), o bien $x^2 - 2x + 4 = 0$, que no tiene raíces reales.
Así pues, las soluciones reales son $2 \pm \sqrt{2}$.

7. Demostrar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

Solución: Dividiendo 2222 por 7 obtenemos 2222 = 7 × 317 + 3, luego 2222 = 3 + $\dot{7}$ (3 más un múltiplo de 7). Por tanto $2222^{5555} = (3 + \dot{7})^{5555} = 3^{5555} + \dot{7}$.
Análogamente, 5555 = 7 × 794 − 3 = −3 + $\dot{7}$, luego
$5555^{2222} = 3^{2222} + \dot{7}$.
Ahora, 31 = 3, 32 = 9 = 2 + $\dot{7}$, 33 = 3 × (2 + $\dot{7}$) = 6 + $\dot{7}$, 34 = 4 + $\dot{7}$, 35 = 5 + $\dot{7}$, 36 = 1 + $\dot{7}$. Así:
$3^{5555} = 3^{6\times925+5} = (3^6)^{925} \times 3^5 = (1 + \dot{7}) \times (5 + \dot{7}) = 5 + \dot{7}$, $3^{2222} = 3^{6\times370+2} = (3^6)^{370} \times 3^2 = (1 + \dot{7}) \times (2 + \dot{7}) = 2 + \dot{7}$.
Por tanto,
$2222^{5555} + 5555^{2222} = 3^{5555} + 3^{2222} + \dot{7} = (5 + \dot{7}) + (2 + \dot{7}) + \dot{7} = \dot{7}$.