Soluciones a los problemas de preparación para la Olimpiada Matemática Española (IV)

Adrián Franco Rubio

13 de diciembre de 2013

1. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ números enteros tales que cada uno de ellos se puede poner como suma de dos cuadrados perfectos. Demostrar que su producto $x_1 x_2 ... x_n$ también puede escribirse como suma de dos cuadrados perfectos.

(53. Deutsche Mathematik-Olympiade, 2013)

Solución. Lo probaremos por inducción sobre n. Para $n = 1$, el producto es igual a x_1, que sabemos que es igual a la suma de dos cuadrados. Supongamos ahora que el enunciado es cierto para $n \leq k$ y probémoslo para $n = k + 1$: por hipótesis de inducción

$$x_1 x_2 ... x_k = a^2 + b^2$$

y además sabemos que

$$x_{k+1} = c^2 + d^2$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. El resultado ahora se sigue de la identidad:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

2. En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los 10 cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los 10 cm.

(OME, fase local 2013)

Solución. Sean $P_1, P_2, ...P_{15}$ las quince parejas iniciales. Ordenemos ahora los chicos por alturas $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{15}$ y también las chicas $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_{15}$. Supongamos que una de las parejas tuviese una diferencia de alturas superior a 10 cm, digamos $a_k - b_k > 10$. Entonces las parejas formadas por las chicas de alturas $b_1, ..., b_k$ y los chicos de alturas $a_k, ..., a_{15}$ también cumplirán $a_i - b_j > 10$. Coloquemos ahora cada una de las 16 personas mencionadas, de alturas $b_1, ..., b_k, a_k, a_{k+a}, ..., a_{15}$, en las parejas (cajas) P_s iniciales, según el lugar que ocupaban. Por el principio de las casillas (o del palomar), dos personas compartirán la misma caja. Por lo tanto en las parejas iniciales había una cuya diferencia de alturas era mayor que 10 cm, contra lo supuesto.

3. Demostrar que la ecuación

$$x(x+2) = y(y+1)$$

no tiene soluciones enteras con $x, y > 0$.

(Olympiade Française de Mathématiques 2012-2013, Envoi 3)

Solución. Supongamos que x, y son una solución de la ecuación. Entonces tenemos

$$(x+1)(x+2) > x(x+2) = y(y+1)$$

de donde $y < x+1$. Por otra parte

$$x(x+1) < x(x+2) = y(y+1)$$

y resulta $x < y$. Juntándolo todo

$$x < y < x+1$$

Lo que no puede darse para x, y enteros.

4. Encontrar todas las soluciones reales (x, y) del sistema

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$x^2y + xy^2 = -2$$

(OME, fase local 2006)

Solución. Como la segunda ecuación se puede escribir en la forma

$$xy(x+y) = -2$$

vamos a escribir la primera de manera relativamente parecida:

$$(x+y)^2 - 3xy = 7$$

Haciendo el cambio de variables $s = x + y, p = xy$ obtenemos el sistema equivalente

$$s^2 - 3p = 7$$

$$sp = -2$$

La segunda ecuación implica que $s \neq 0$, y $p = \frac{-2}{s}$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene la ecuación cúbica

$$s^3 - 7s + 6 = 0$$

que tiene las raíces enteras $s = 1, s = 2, s = -3$. A estos valores de s les corresponden los valores de p $p = -2, p = -1, p = \frac{2}{3}$ respectivamente. Los números x e y son las raíces de la ecuación cuadrática $t^2 - sx + p = 0$ que en cada uno de los casos anteriores da las tres ecuaciones de segundo grado

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t^2 + 3t + \frac{2}{3} = 0$$

Resolviendo obtenemos las soluciones del sistema dado:

$$\{x, y\} = \{-1, 2\}$$

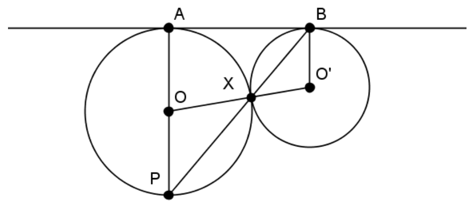
$$\{x, y\} = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$$

$$\{x, y\} = \{\frac{-9 - \sqrt{57}}{6}, \frac{-9 + \sqrt{57}}{6}\}$$

5. Dos circunferencias S y T son tangentes en el punto X. Una recta es tangente común a ambas en los puntos A y B respectivamente (A y B son distintos). Sea AP un diámetro de S. Demostrar que los puntos B, X, y P están alineados.

(British Mathematical Olympiad 2012-2013, Round 1)

Solución. Sabemos que, dadas dos circunferencias tangentes, sus centros y el punto de tangencia están alineados, de modo que sabemos que en la figura O, X y O'lo están. Basta pues probar que los ángulos $O\hat{X}P$ y $O'\hat{X}B$ son iguales. Veamos de hecho que los triángulos OPX y O'BX son semejantes. Ambos son isósceles, pues dos de sus lados son radios de S y T respectivamente, y los ángulos $X\hat{O}P$ y $X\hat{O}'B$ son iguales, pues son alternos internos de las paralelas dadas por OA y O'B, ambas perpendiculares a la tangente común a ambas circunferencias. En consecuencia, tenemos la semejanza de ambos triángulos y de ella se sigue el resultado.



6. Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

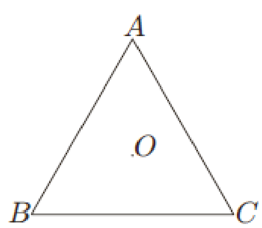
(OME, fase local 2012)

Solución. Puesto que $abc = 1$ y $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, tenemos que

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc-ab-bc-ca+a+b+c-1 = a+b+c-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > 0$$

La desigualdad anterior se cumple cuando uno de los factores del número $(a-1)(b-1)(c-1)$ es positivo o los tres factores son positivos. Si fuesen positivos los tres, tendríamos $a > 1, b > 1$ y $c > 1$, cosa que no es posible ya que $abc = 1$. Por tanto, sólo uno de ellos es positivo y esto acaba la demostración.

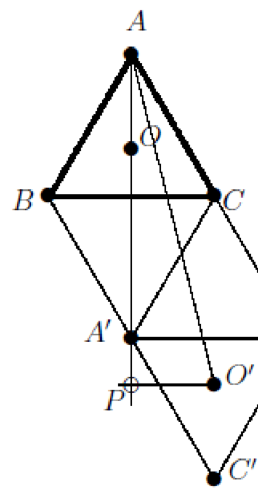
7. Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O. Un rayo parte



de O y se refleja en los tres lados, AB, AC y BC, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A. Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.
Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

(OME, fase local 2010)

Solución. Como el rayo se refleja en los lados indicados, basta con desarrollar el camino recorrido por el rayo, para ello desdoblamos el triángulo según la siguiente figura. Esta figura nos indica que existe un único camino para ir del



punto O al punto A reflejándose en los lados del triángulo en el orden indicado. Para calcular la distancia recorrida por el rayo, basta considerar el triángulo APO'; es un triángulo rectángulo del que tenemos que calcular la hipotenusa AO'. Sabemos que O'P es igual a $\frac{1}{2}$. La distancia PA es $1+1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$de la altura $h=\sqrt{\frac{3}{2}}$ del tríangulo. En este caso tenemos:

$$(AO')^2=(O'P)^2+(PA)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{7^2\times 3}{3^2\times 2^2}=\frac{1}{4}+\frac{49}{12}=\frac{13}{3}$$

Por tanto la distancia AO$'$ es $\sqrt{\frac{13}{3}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$

8. Resuelve esta ecuación exponencial:

$$2^x 3^{5^x}+\frac{3^{5^{-x}}}{2^x}=6$$

(OME, fase local 2013)

Solución. Aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica y, después, una de de sus más conocidas consecuencias (la suma de un número real positivo y su inverso es siempre mayor o igual que 2, y la igualdad sólo se da para el número 1) tenemos,

$$6=2^x 3^{5^x}+2^{-x}3^{5^{-x}}\geq 2\sqrt{2^x 3^{5^x} 2^{-x} 3^{5^{-x}}}\geq 6$$

Y la igualdad se dará cuando los números mediados sean iguales:

$$2^x 3^{5^x} = 2^{-x} 3^{5^{-x}}$$

esto es, cuando $x = 0$ que será, pues, la única solución de la ecuación.

9. Dado un número natural n mayor que 1, hallar todos los pares de números enteros a y b, tales que las dos ecuaciones $x^n + ax - 2008 = 0$ y $x^n + bx - 2009 = 0$ tengan, al menos, una raíz común real.

(OME, fase local 2008)

Restando ambas ecuaciones tenemos que $(b - a)x = 1$. Luego si estas ecuaciones van a tener una raíz común, tiene que ser $x = 1/(b - a)$. Notar que a no puede ser igual a b. Sustituyendo en una de las ecuaciones, tendremos que

$$(b - a)^{n-1}(a - 2008(b - a)) = -1$$

y que, por ser a y b enteros, estos dos factores serán uno igual a +1 y otro igual a -1. Si $(b - a) = 1$, se tendrá $a = -1 + 2008 = 2007$, y por tanto $b = 2008$. Si $(b-a) = -1$, se tendrá $a = (-1)^n - 2008$, y por tanto $b = (-1)^n - 2009$. Luego los únicos pares de números (a, b) son $(2007, 2008)$ y $((-1)^n - 2008, (-1)^n - 2009)$.