1. Soluciones

Problema 1. *En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 720 llaves.*

Solución. Notar que de cada cerradura, entre todos los gnomos deben tener al menos 5 llaves, ya que en caso contrario, habrían 3 gnomos que juntos no pueden abrir esa cerradura. Como hay $12 \cdot 12 = 144$ cerraduras, entre todos los gnomos tienen al menos $5 \cdot 144 = 720$ llaves.

Problema 2. *Determinar todos los enteros n tales que*

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

es entero.

Solución. Como los radicandos deben ser mayores o iguales que 0, tenemos

$$\frac{625}{4}-n \geq 0, \qquad \frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n} \geq 0.$$

Es decir, $0 \leq n \leq \frac{625}{4}$. Como n es entero, tenemos que $n \in \{0, 1, 2, ..., 156\}$.

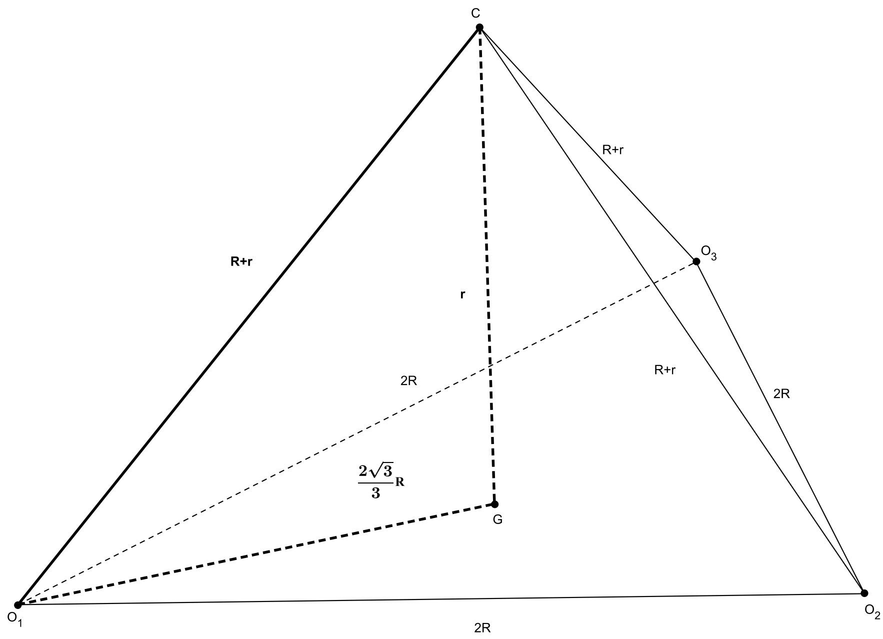
Sea $m := \sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$. Elevando al cuadrado y simplificando, tenemos

$$m^2 = 25 + 2\sqrt{n}.$$

Luego n es un cuadrado perfecto. Así, $n \in \{0, 1, 4, 9, ..., 144\}$ (ya que $13^2 = 169 > 156$). Por tanto, $25 \leq 25 + 2\sqrt{n} \leq 49$. Como $25 + 2\sqrt{n}$ debe ser un cuadrado perfecto impar, tenemos que $25 + 2\sqrt{n} \in \{25, 49\}$. Esto nos da los valores $n = 0$ y $n = 144$. Es inmediato comprobar que estos valores de n son solución.

Problema 3. *Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encontrar la relación existente entre R y r.*

Solución. Observar que los centros de las 5 esferas forman dos tetraedros como el de la figura, donde O_1, O_2, O_3 son los centros de las esferas de radio R, C es el centro de una de las esferas de radio r y G es el baricentro del triángulo equilátero $O_1O_2O_3$. Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo en negrita de la figura tenemos $(R+r)^2 = r^2 + \frac{4}{3}R^2$. Simplificando, obtenemos la relación $R = 6r$.



Problema 4. *Calcular los números p y q tales que las raíces de la ecuación*

$$x^2 + px + q = 0$$

sean D *y* $1 - D$*, siendo* D *el discriminante de esa ecuación de segundo grado.*

Solución. Usando las fórmulas de Cardano-Vieta tenemos

$$D + (1 - D) = -p,$$

$$D(1 - D) = q.$$

De la primera igualdad obtenemos $p = -1$ y de la segunda, usando que $D = p^2 - 4q = 1 - 4q$ obtenemos

$$(1 - 4q)4q = q.$$

Luego $q = 0$ ó $q = \frac{3}{16}$. Es inmediato comprobar que $(p, q) = (-1, 0)$ y $(p, q) = (-1, \frac{3}{16})$ son solución.

Problema 5. *Los números naturales 22,23 y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares:*

$$22 = 2^1 \cdot 11^1; \quad 23 = 23^1; \quad 24 = 2^3 \cdot 3^1.$$

¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad? Razónese la contestación.

Solución. Notar que dados 8 naturales consecutivos, exactamente uno de ellos es de la forma $8n + 4 = 4(2n + 1)$; es decir, en su descomposición en factores primos el 2 aparece elevado al cuadrado. Por tanto, a lo sumo 7 números consecutivos cumplen el enunciado. Como $29, 30, ..., 35$ cumplen el enunciado, obtenemos que este máximo es 7.

Problema 6. *Los vértices del cuadrilátero convexo $ABCD$ están situados en una circunferencia. Sus diagonales AC y BD se cortan en el punto E. Sea O_1 el centro del círculo inscrito en el triángulo ABC, y O_2 el centro del círculo inscrito en el triángulo ABD. La recta O_1O_2 corta a EB en M y a EA en N. Demostrar que el triángulo EMN es isósceles.*

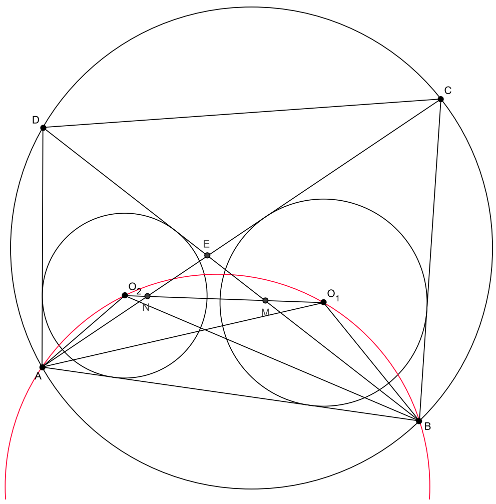
Solución. Como $\angle AO_2B = 90 - \angle ADB = 90 - \angle ACB = \angle AO_1B$, obtenemos que el cuadrilátero ABO_1O_2 es cíclico.

Además,

$$\angle NAO_1 = \angle CAO_1 = \angle O_1AB = \angle O_1O_2B = \angle MO_2B,$$

$$\angle NO_1A = \angle O_2O_1A = \angle O_2BA = \angle DBO_2 = \angle MBO_2.$$

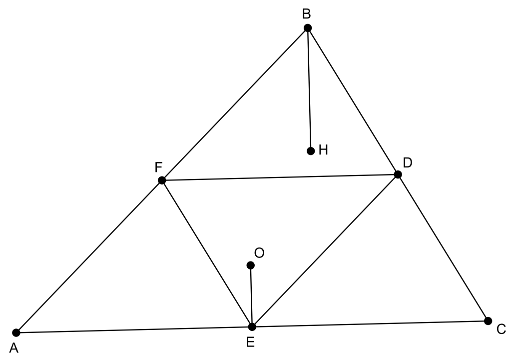
Por tanto, $\angle ENM = \angle NAO_1 + \angle NO_1A = \angle MO_2B + \angle MBO_2 = \angle EMN$. Es decir, el triángulo EMN es isósceles.



Problema 7. *Demostrar que en un triángulo la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice. (Fase Local 2007)*

Solución. Sea ABC el triángulo, H el ortocentro, O el circuncentro y D, E, F los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Queremos probar que $BH = 2OE$.

Como el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF con razón 2 y O es el ortocentro del triángulo DEF, obtenemos que $BH = 2OE$.



Problema 8. *ABC es un triángulo isósceles con AB=AC. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C. Denotemos por a, b y c a las distancias de P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que $a^2 = bc$. (OME 2006)*

Solución. Como AB es tangente a la circunferencia en B, tenemos que $\angle ABP = \angle PCB$. Análogamente, $\angle ACP = \angle PBC$.

Aplicando la definición de seno tenemos que

$$\frac{a}{PC} = \operatorname{sen} \angle PCB = \operatorname{sen} \angle ABP = \frac{c}{PB}$$

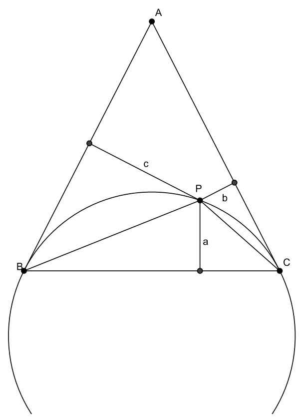
$$\frac{a}{PB} = \operatorname{sen} \angle PBC = \operatorname{sen} \angle ACP = \frac{b}{PC}.$$

Entonces

$$c = \frac{a \cdot PB}{PC}$$

$$b = \frac{a \cdot PC}{PB}.$$

Multiplicando ambas igualdades obtenemos $a^2 = bc$.



Problema 9. *Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple*

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc.$$

(OME 2007)

Solución. Prolongamos AP y AO hasta cortar a la circunferencia circunscrita la triángulo ABC en Q y R, respectivamente.

Como los triángulos APB y ACQ son semejantes (ya que $\angle BAP = \angle QAC$ y $\angle ABP = \angle AQC$), obtenemos que

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AQ}.$$

Por otra parte, usando el Teorema del coseno, tenemos que $OP^2 = AO^2 + AP^2 - 2AO \cdot AP \cdot \cos\angle OAP$.

Como AR es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, deducimos que $\cos\angle OAP = \frac{AQ}{AR}$. Despejando y denotando por r el radio de la circunferencia circunscrita, tenemos que

$$AO^2 + AP^2 - OP^2 = 2AO \cdot AP \cdot \frac{AQ}{AR} = 2r \cdot AP \cdot \frac{AQ}{2r} = AP \cdot AQ.$$

Pero, como vimos antes, $AP \cdot AQ = AB \cdot AC = bc$. Queda así probado el enunciado.