Taller de Talento Matemático **Sesión 18/10/13**

Esther García

Problemas Olimpiada
Fase Local Aragón
Años: 2005, 2006, 2007 y 2008

1. Sean p y q dos números naturales con $p \geq q$. Prueba que para todo número real positivo x se tiene que $(1+x^q)^p \geq (1+x^p)^q$.

2. Dado un cuadrilátero cualquiera, considera los cuatro triángulos que se forman al trazar sus diagonales. Si sabes el área de tres de estos triángulos. ¿Cuál es el área del triángulo que falta?

3. Se suponen conocidas las raíces reales de las n ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuaciones	Raíces
$x^2 + a_1 x + b_1 = 0$	$x_0,\ x_1$
$x^2 + a_2 x + b_2 = 0$	$x_0,\ x_2$
…………………	……..
$x^2 + a_n x + b_n = 0$	$x_0,\ x_n$

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación: $x^2 + \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} x + \dfrac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = 0$

4. Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

5. Sea P una familia de puntos en el plano tal que por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

6. Halla las soluciones reales de la ecuación: $x \cdot \left(\dfrac{6-x}{x+1}\right) \cdot \left(\dfrac{6-x}{x+1} + x\right) = 8$

7. Demostrar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.