Josep Rochera Gaya (IES Goya. Zaragoza)
Taller de Talentos Matemáticos
Zaragoza, 22 noviembre 2013

Construcciones Geométricas

Por "construcciones geométricas" se suele entender la Geometría que se puede construir con regla y compás. Debido a que el tiempo disponible para desarrollar las Matemáticas en la Educación Secundaria y el Bachillerato se ha ido reduciendo progresivamente, este tema se suele tratar casi de forma simbólica en los programas de esta materia, viéndose más, posiblemente, en el área de Plástica (Dibujo Lineal). Por otra parte, con la utilización de los ordenadores y de programas de CAD (Diseño Asistido por Ordenador) o de Geometría Interactiva, la utilización real del compás y del transportador se ha reducido al mínimo, habiendo prácticamente desaparecido en las áreas profesionales.

A pesar de todo, las "construcciones geométricas" mantienen intacta su utilidad para desarrollar la intuición, facilitando una visión global de un problema que permite, en muchos casos, obtener una solución con un grado de aproximación bastante aceptable y, también, desarrollar una vía de resolución para lograr la solución exacta.

En lo que sigue veremos una aproximación esquemática y superficial de lo que se puede hacer y resolveremos de forma aproximada algunos ejemplos. Con esto no se pretende eludir la resolución algebraica (exacta) sino hacer ver que, en muchas ocasiones, es conveniente desarrollar un esbozo de los elementos descritos en el problema para poder traducir, posteriormente, todos los pasos anteriores al lenguaje algebraico y resolver con todo detalle el problema.

Material a utilizar

Regla, compás y transportador de ángulos.

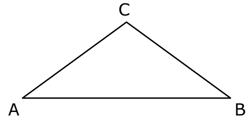
Es conveniente hacer dos consideraciones respecto de estos instrumentos:

- La regla que se utiliza normalmente es una regla graduada, vienen determinadas las medidas en centímetros y milímetros. En realidad, la regla de la Geometría Clásica es un instrumento que nos permite solo trazar rectas (siendo estrictos deberíamos hablar de segmentos de rectas), aunque parezca extraño las distancias "se miden" con el compás comparando un segmento con otro considerado como la unidad. En la práctica utilizamos la regla, a la que estamos acostumbrados por comodidad.
- El transportador nos permite medir de una manera aproximada los ángulos, pero es precisamente este carácter de aproximación y del buen ojo de quien mide lo que impide que sea tenido en cuenta en las demostraciones. A pesar de ello, se utilizará esporádicamente con fines didácticos e intuitivos y, fundamentalmente, prácticos.

0 Preliminares

Tomaremos como resultados conocidos los siguientes:

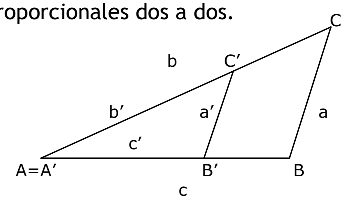
P1 La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º.



A+B+C = 180º

P2 Semejanza de triángulos. Proporcionalidad de sus lados.

Dos triángulos ABC, A'B'C' son semejantes si tienen los mismos ángulos y los lados son proporcionales dos a dos.



A=A' B=B' C=C'

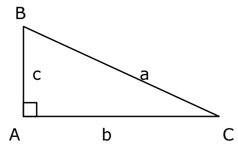
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Se puede reducir la comprobación a los siguientes casos:

(a) dos de los ángulos son iguales.
(b) tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.
(c) todos los lados son proporcionales.

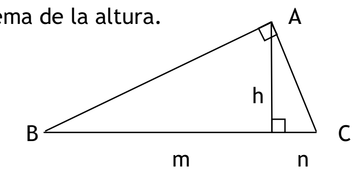
P3 Teorema de Pitágoras.

ABC es rectángulo en A sii (si y solo si) $a^2 = b^2 + c^2$



Aunque, en general, se suele utilizar el teorema de Pitágoras solo para aplicar la igualdad, también se puede emplear para demostrar que un triángulo es rectángulo comprobando que sus lados verifican la relación.

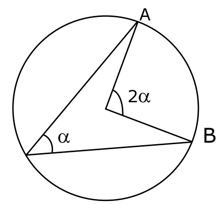
P4 Teorema de la altura.



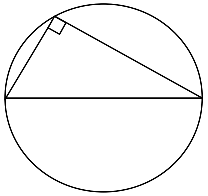
$$h = \sqrt{m \cdot n}$$

P5 Ángulos inscrito y central de un arco en una circunferencia.

El ángulo inscrito es la mitad que el ángulo central.

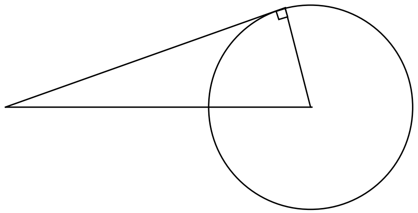


P6 El ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto (90º).



Este es un caso particular del anterior pero, por su importancia y utilidad, lo damos por separado.

P7 La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.

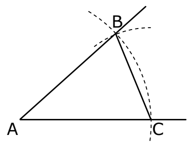


1. Elementos generales

En la Geometría de la regla y del compás se construyen los ángulos de manera exacta por procedimientos geométricos, lo que exige suponer que las rectas son líneas sin espesor. En la vida real esto es imposible, pues por más fina que sea la punta del lápiz con que se dibujen siempre tienen un determinado espesor, así, los valores que podemos obtener nunca pueden ser exactos sino aproximaciones más o menos buenas, en función de la exactitud de los elementos de construcción y de la habilidad o destreza con que los hayamos trazado.

En el estudio de un problema geométrico utilizaremos el transportador para construir y medir ángulos con comodidad, aunque no podrá constituir nunca un elemento de demostración. La exactitud geométrica se obtiene siempre por razonamientos y cálculos geométricos (por ejemplo, aplicando el teorema de Pitágoras). De igual manera, no se puede sustituir $\sqrt{2}$ por cualquier número decimal si no es para obtener un valor aproximado.

Para duplicar un ángulo de manera exacta, se puede trazar una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y un determinado radio y, a continuación, midiendo con el compás la medida del arco que determina se podría copiar en otro punto sin más dificultades.



Hay ocasiones en las que no disponemos de un transportador y necesitamos hacer un esbozo para estudiar un problema. En estos casos se puede trazar un ángulo de un determinado valor con un error muy pequeño sin más que dividir en dos o tres partes un ángulo conocido. Veámoslo con un ejemplo:

Sin transportador, dibujar ángulos aproximados de: 90º, 45º, 30º, 60º, 20º y 150º.

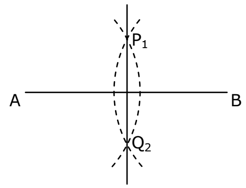
En algunos gráficos que realizaremos para ilustrar algunos problemas, para facilitar su reconstrucción y simplificar las explicaciones, representaremos los elementos dados por el problema con letras, y los que se vayan determinando a continuación con letras y subíndices, que indicarán cuál es el orden de aparición en la gráfica.

En varios casos se omitirá voluntariamente la construcción, que se dejará como ejercicio.

1. Mediatriz de un segmento AB.

Como se sabe, se deben trazar dos circunferencias con el mismo radio y centros en cada uno de los extremos del segmento (A y B) y, luego, basta con unir los puntos de intersección (P_1 y Q_2).

Este procedimiento nos permite hallar también el punto medio del segmento AB.



2. Perpendicular a una recta por un punto P exterior a ella.

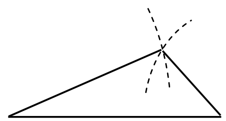
Se traza una circunferencia con centro en P y con el suficiente radio para que intersecte a la recta en dos puntos A y B. La mediatriz de A y B es la recta buscada.

3. Perpendicular a una recta por un punto de ella.

El comentario anterior sirve también para este caso.

4. Triángulo conocidos sus lados.

Se traza el segmento mayor en horizontal y, a continuación, una circunferencia en uno de sus extremos con radio el segundo lado y otra con centro en el otro extremo y radio el tercer lado. La intersección de éstas es, evidentemente, el tercer vértice.



Se ve fácilmente que, para que se pueda formar el triángulo, se debe cumplir la conocida como desigualdad triangular: la suma de dos de los lados del triángulo ha de ser siempre mayor que el tercero:

$$a < b+c$$

5. Triángulo rectángulo conociendo un cateto y la hipotenusa.

Se traza el cateto en horizontal y por uno de sus extremos una recta perpendicular (o sea, vertical) y una circunferencia con centro en el otro extremo y radio la hipotenusa.

Otra forma sería dibujar la hipotenusa en horizontal, la circunferencia que la tiene como diámetro, y una circunferencia con centro en un extremo y radio el cateto conocido. La intersección de las circunferencias es el tercer vértice (aplicar **P6**).

6. Triángulo del que se conoce un lado y dos ángulos.

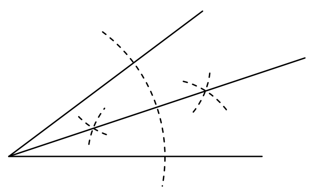
El tercer ángulo se halla fácilmente (por **P1** la suma de los tres es de 180º), por lo que se puede suponer que los ángulos conocidos son los de los extremos del lado. Se traza en horizontal el lado y en sus extremos los ángulos, donde se corten los lados de éstos tenemos el tercer vértice.

7. Cuadrado de lado conocido.

Dibujado un lado en horizontal se levantan verticales por sus extremos y trazando circunferencias de radio igual al lado y centros en los extremos de aquél, obtenemos los otros vértices en las intersecciones respectivas.

8. Bisectriz de un ángulo.

Basta trazar una circunferencia cualquiera con centro en el vértice del ángulo y marcar los puntos intersección con los lados del ángulo. La mediatriz de este segmento es la bisectriz buscada (se considera solo la semirrecta que parte del vértice).



9. Paralela a una recta r por un punto P exterior a ella.

Se traza la perpendicular a r por P y, a continuación su propia perpendicular (aplicar **3**).

10. Determinar el centro de una circunferencia.

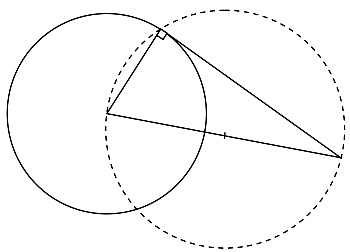
Se marcan tres puntos de la misma y, acto seguido, se trazan las mediatrices de dos de los segmentos que determinan. Su intersección es el centro.

11. Circunferencia que pasa por tres puntos.

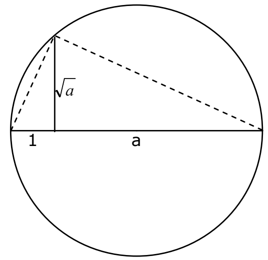
Con el procedimiento anterior se halla el centro de la circunferencia buscada, y abriendo el compás hasta uno de los puntos tendremos el radio.

12. Trazar la tangente a una circunferencia desde un punto exterior a ella.

Se pueden aplicar **P6** y **P7**, luego bastará con dibujar la circunferencia cuyo diámetro sea el punto y el centro de la dada. El punto de tangencia se encuentra donde se corten las circunferencias.



13. Segmento que nos dé la raíz cuadrada de un número.



Dibujamos un segmento horizontal de longitud 1+a y trazamos la circunferencia cuyo diámetro es dicho segmento. Por el punto que dista 1 desde uno de los extremos se levanta la perpendicular hasta encontrar la circunferencia.

Este segmento es precisamente la raíz cuadrada de a (basta aplicar **P6** y el teorema de la altura **P4**).

2. Análisis y síntesis

Aunque los elementos generales vistos son muy sencillos y algunos ya sabidos por la práctica del dibujo lineal, a poco que profundicemos las construcciones se pueden complicar fácilmente como veremos a continuación.

Como normas de carácter general, para resolver los problemas de construcción se pueden tomar en consideración las siguientes:

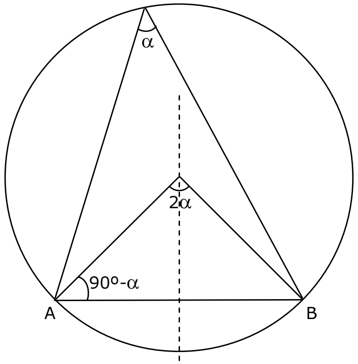
- Conviene estudiar si en el problema existen elementos que nos pueden ayudar como simetrías, semejanzas, etc. En este caso, el problema suele simplificarse mucho.
- Si los elementos que nos dan son genéricos no conviene presuponer o tomar los mismos valores, porque pudiéramos encontrarnos con un caso particular que enmascarara la generalidad.
- En bastantes ocasiones, un procedimiento bastante útil para comprender y averiguar cómo se puede obtener la solución es suponer que ya se tiene ésta, y sobre su dibujo esbozado intentar determinar elementos o relaciones que nos permitan entender o adivinar cuál es el camino a recorrer. Así, se debe realizar un recorrido inverso o marcha atrás, esto es precisamente lo que los griegos llamaban el análisis para, finalmente, llegar a la síntesis.
- Algunos problemas complicados pueden presentar varias posibilidades de ataque para poder resolverlos, en estos casos conviene investigar un poco de cada una por ver cuál de todas ellas ofrece mejores garantías de viabilidad. El hecho de investigar a fondo una determinada opción no nos asegura que vaya a dar resultados, en ese caso habríamos dedicado mucho tiempo sin obtener ningún fruto. El ejemplo del ovillo de lana o de cuerda todo liado es bastante ilustrativo: conviene tirar un poco de un sitio y de otro y, tras probar algunos, decidirnos por uno de ellos.
- Algunos (o bastantes) problemas no suelen salir a la primera y puede ser frustrante pensar que, aunque trabajemos y nos esforcemos al máximo, no obtengamos resultados. Aparentemente no hemos avanzado nada, pero no es tiempo perdido (en contra de lo que podamos creer), pues nuestro subconsciente sigue trabajando sin darnos cuenta y algunas veces resulta que,

cuando menos lo esperamos, sin pensar en el problema se nos aparece la solución como de una forma mágica.

Lo entenderemos mejor con ejemplos.

14. Trazar el arco capaz con ángulo α de un segmento AB .

Por arco capaz de un segmento y un ángulo α se entiende el lugar geométrico (l.g.) de los puntos del plano desde los que se ve dicho segmento bajo un ángulo α . Este l.g. coincide con uno de los dos arcos en que divide el segmento a una determinada circunferencia (**P5**).



Para poder dibujar esta circunferencia se tiene en cuenta el hecho de que el ángulo central vale el doble que el inscrito. Así, dibujaremos una circunferencia cuyo centro esté en la mediatriz del segmento y tal que el ángulo que abarque sea 2α (se tendrá que dibujar en A un ángulo que valga 90º-α, ¿por qué?). Los detalles gráficos se dejan como ejercicio.

Habrá que decidir cuál de los dos arcos es el que nos interesa. ¿Cuánto vale el ángulo del otro arco capaz?

Como ejercicio, dibujar el arco capaz con ángulo 30º de un segmento de 5 cm.

15. Trazar las tangentes interiores a dos circunferencias exteriores.

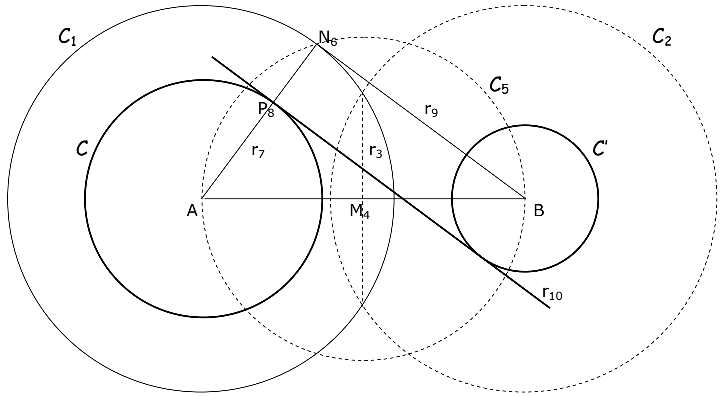
Se puede empezar dibujando dos circunferencias exteriores (con distinto radio para no perder generalidad) y trazar de manera aproximada una de las soluciones. Ahora se trata de ver qué condiciones cumple la tangente, lo más fácil es dibujar los radios a los puntos de contacto P y Q (que serán perpendiculares a aquélla por **P7**). Como estos puntos no los conocemos, necesitamos ver cómo construirlos considerando algunos elementos que pueden o no estar ya presentes.

En este punto conviene concentrarse y no tener miedo a "emborronar" el gráfico, probando con varias posibilidades. Aunque pensemos que el problema es difícil y que no vamos a saberlo resolver, muchas veces disponemos de más información de la que nos imaginamos, y puede funcionar muy bien nuestra experiencia en casos parecidos, tengan o no los mismos elementos.

¿Podríamos trazar una paralela a la tangente por uno de los centros? ¿Qué tal si alargamos el otro radio hasta intersectar con este segmento? ¿El ángulo que forman es de 90º? ¿No se podría considerar este segmento como la tangente desde el centro a otra circunferencia? ¿Qué radio tendría esta última? ...

Tras este **análisis** el problema se transforma y pasa a ser "sencillo" cuando se ha comprendido a fondo el procedimiento, viene ahora la **síntesis** en la que se explicita el proceso directo y no inverso de la construcción: Deberemos trazar una circunferencia con centro en uno de los dos centros y de radio la suma de los radios; a continuación la tangente (por **12**) desde el segundo centro a esta nueva

circunferencia (en realidad no hace falta, ¿por qué?); el radio en el punto de contacto cortará la primera circunferencia en un punto desde el que trazaremos la perpendicular a este radio.



16. Trazar las tangentes exteriores a dos circunferencias exteriores.

17. Teorema de Napoleón: Si sobre los lados de un triángulo cualquiera se dibujan triángulos equiláteros, el triángulo que determinan sus centros de gravedad también es equilátero.

Dejamos la comprobación como ejercicio (la demostración excede el nivel de los destinatarios de estas líneas).

Comentarios al respecto pueden verse en la nota 1 del final.

3. Construcción de polígonos regulares inscritos en una circunferencia

Dibujar un polígono regular de n lados y lado a es una tarea bastante sencilla. En primer lugar se averigua el ángulo interior del polígono (180º-360º/n, ¿por qué?), se traza el lado contiguo y, a partir de sus mediatrices, el centro de la circunferencia circunscrita. Luego, con ayuda del compás, se determinan el resto de los vértices.

Un problema más complicado es el inverso, es decir, dada una circunferencia de radio r, determinar un polígono inscrito con un número determinado de lados. Este problema se resolvió en algunos casos y dio origen a investigaciones diversas y muy ricas, desde su utilización para el cálculo aproximado de π por parte de Arquímedes a ser uno de los motivos que permitieron la resolución de varios problemas clásicos en el siglo XIX.

Veamos algunos ejemplos sencillos.

18. Dibujar un hexágono inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

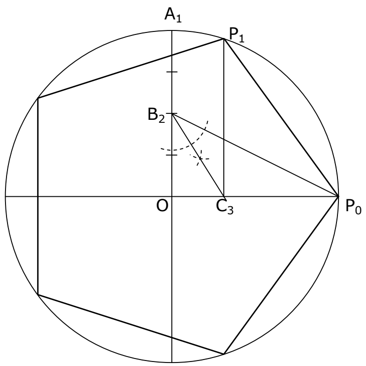
El triángulo cuyos vértices son el centro de la circunferencia y dos vértices consecutivos del hexágono forman un triángulo equilátero (es isósceles y el ángulo central es de 60º), por lo que el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia. Así, bastará marcar con el compás los vértices del hexágono con la misma abertura con la que se ha trazado la circunferencia.

19. Dibujar un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

A partir del centro de la circunferencia se traza un diámetro y, luego, la mediatriz de éste.

20. Dibujar un pentágono inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

Si O es el centro de la circunferencia y P_0 , A_1 los extremos de dos diámetros horizontal y vertical respectivamente, por **1** determinamos B_2 punto medio del segmento OA_1, y C_3 como punto de intersección de OP_0 con la bisectriz del ángulo OB_2P_0. Levantando por C_3 una vertical encontraremos la circunferencia en el punto P_1 que será el segundo vértice del pentágono. El resto de los vértices los obtendremos trazando arcos con el compás con una abertura igual a P_0P_1.



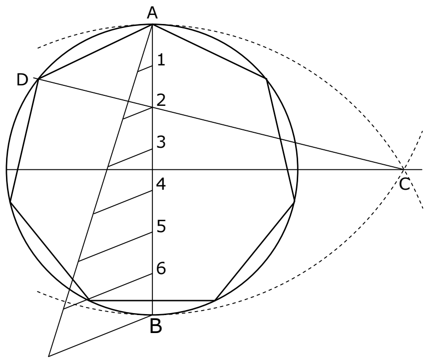
21. Ídem con un: triángulo equilátero, octógono, decágono y dodecágono.

Se deducen fácilmente a partir del hexágono, cuadrado y pentágono.

22. Método general para construir polígonos regulares de n lados.

Nos serviremos como ejemplo de la construcción del heptágono. Dada la circunferencia, consideramos el diámetro vertical AB y lo dividimos en 7 partes (se utiliza **P2** dibujando segmentos unitarios sobre una semirecta auxiliar y oblicua que parte de A). Por otra parte, sea C el punto intersección de los arcos con centros en A y B y radio AB. Trazamos desde C un segmento que pase por la división 2 anterior, el punto D de corte de este segmento con la circunferencia

original es el segundo vértice del heptágono (el primero es A), los demás los determinaremos ayudándonos con el compás con la abertura AD.

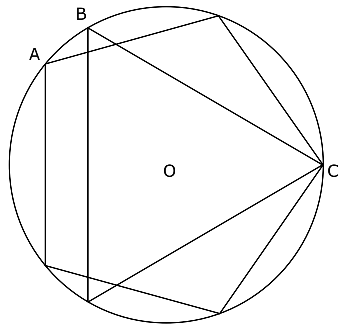


Desgraciadamente, este procedimiento funciona mientras no necesitemos dibujos o valores más que aproximados, pues el método no es exacto. Llegados a este punto podríamos preguntarnos si la construcción del pentágono es exacta o solo lo parece. La respuesta es que el procedimiento es exacto, como bien sabían ya los griegos, pero el poco tiempo de que disponemos no nos permite incidir en ello.

23. Construcción exacta de un polígono de 15 lados.

Se dibujan, partiendo del mismo vértice, un pentágono y un triángulo equilátero. El segundo vértice de este último divide un arco del pentágono en tres partes iguales, precisamente igual al arco del polígono de 15 lados buscado, pues el ángulo central AOB es igual al AOC menos el BOC, o sea:

$(72º+72º)-120º = 24º \qquad (y\ \ 15·24º = 360º)$



Este es un caso particular que no es, en absoluto, generalizable. Véase, al respecto, la Trisección del ángulo, en el apartado **5.a** .

El problema general de la construcción de polígonos regulares en una circunferencia siguió abierto hasta el siglo XIX. En realidad fue Gauss quien, a los 18 años, resolvió la construcción del polígono de 17 lados y sentó las bases para la resolución global del problema. Se dice que Gauss, a esa edad, dudaba entre dedicarse a las Matemáticas o al estudio del Latín, y fue precisamente este problema uno de los motivos que le decidieron por las Matemáticas.

4. Problemas varios

Hay varias partes de la Matemática en las que algunos de sus problemas se pueden resolver con un enfoque geométrico, bien sea de manera exacta o de forma aproximada. En este último caso, el error de las soluciones aproximadas que obtendremos será bastante pequeño y, en general, admisible. Además de poder estimar bastante bien la solución, la construcción geométrica nos permitirá comprender el problema para hallar la solución exacta con las herramientas de que dispongamos.

En muchas ocasiones, la construcción gráfica exigirá determinar previamente la escala a la que habrá que reducir las unidades.

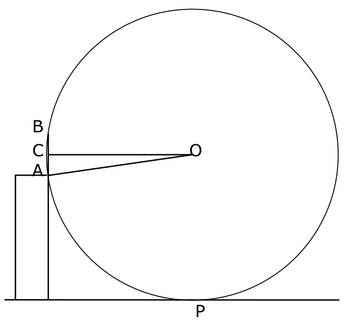
Nos ayudaremos en las construcciones con el transportador de ángulos.

24. Desde el faro F se observa el barco A bajo un ángulo de 43º con respecto a la línea de la costa; y el barco B, bajo un ángulo de 21º. El barco A está a 5 km de la costa y el B a 3 km. Calcula la distancia (aproximada) entre los barcos.

Este problema es trigonométrico (la Trigonometría es la parte de la Matemática que se dedica a la resolución y medida de triángulos). Su dificultad geométrica es mínima, lo único que hay que tener en cuenta es leer con gran atención los datos para no interpretar otra cosa y poder realizar el gráfico correctamente. Se deja como ejercicio.

25. Sobre un edificio de 30 m de altura hay un cartel anunciador de 10 m de alto. ¿A qué distancia del edificio verá el cartel bajo ángulo máximo un "diminuto" peatón que camina perpendicularmente a la fachada?

Este problema es típico de los llamados de "máximos y mínimos", consecuencia de un concepto todavía no visto como es el de derivadas. Pero si nos fijamos y reflexionamos un poco en los conceptos geométricos que subyacen en el problema, puede transformarse en otro cuya solución es muy sencilla.



Pensemos en el ángulo inscrito (**P5**). Si tenemos un segmento fijo AB y consideramos una circunferencia que pase por estos dos puntos, el ángulo inscrito que determina su arco será tanto mayor cuanto más pequeña sea la circunferencia.

Así, podemos considerar que el ángulo bajo el que ve el peatón el anuncio es un ángulo inscrito del arco que determina éste. Y, para que sea lo más grande posible, la circunferencia deberá ser tangente al suelo (si fuera más pequeña no lo cortaría), luego su radio OP será de 35 m, y del triángulo AOC (AO=OP=35 , AC=½AB) resulta por el teorema de Pitágoras:

$$OC = \sqrt{35^2 - 5^2} = \sqrt{1200} \cong 34'64m$$

Finalizamos este apartado con una aplicación a la Geometría del espacio.

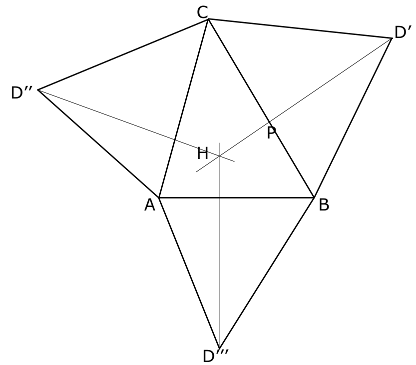
26. Calcular el volumen de un tetraedro del que se conocen sus aristas.

Supongamos que la base es un triángulo de lados 21, 28 y 25 cm, y las caras laterales tienen de medida: 21, 24, 22 ; 28, 24, 26 y 25, 26, 22 cm.

Sabemos que su volumen viene dado por la conocida fórmula: $V = (1/3)\, S_{base} \cdot h$.

La base se puede representar y calcular fácilmente su área. El problema lo tenemos con la altura por la dificultad de representar los objetos del espacio en el plano de forma precisa, pero podemos realizar un modelo a escala construyendo su desarrollo.

Dibujamos el triángulo de la base y continuamos con las caras laterales utilizando cada uno de los lados de la base.



La cara lateral BCD la hemos "abatido" sobre el plano haciéndola pivotar sobre el lado BC de la base, así el recorrido del vértice superior D estará en un plano perpendicular a BC. Por lo tanto, la proyección sobre la base del vértice superior se encontrará sobre la recta perpendicular al lado BC que pasa por D', y lo mismo ocurrirá con D'' y D'''. Sea H dicha proyección y P la intersección de AB con D'H. El triángulo DHP es rectángulo en H, y de éste conocemos la base y la hipotenusa (las podemos medir en el dibujo), luego podemos representarlo (véase **5.**) y calcular su altura que será, al mismo tiempo, la altura del tetraedro.

5. Grandes problemas clásicos de la Geometría clásica

De entre los problemas geométricos que los griegos intentaron resolver y no lo consiguieron, hay tres que han pasado a la Historia y que, repetidamente a lo largo de los siglos, se ha intentado hallar una solución hasta que, en el siglo XIX, se demostró finalmente que eran irresolubles con regla y compás. Éstos son problemas muy fáciles de comprender y, aparentemente, no muy difíciles de conseguir su solución. Consideramos interesante describirlos someramente, aparte su interés histórico, porque nos permiten entender cómo el Álgebra ayudó a resolver problemas geométricos.

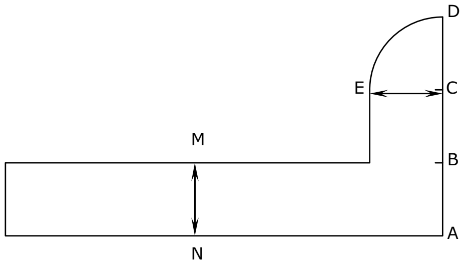
(a) Trisección de un ángulo

Se trata de conseguir dividir (con regla y compás) un ángulo en tres partes de manera exacta. La utilización de un transportador para medir el ángulo y dividirlo en tres posteriormente no se considera admisible pues solamente ofrece una aproximación y no un procedimiento exacto.

Hay que observar que, en ocasiones, algunos ángulos se pueden trisecar sin ninguna dificultad, como se puede observar fácilmente con los ángulos 180º, 90º o bien como lo hemos hecho anteriormente con el ángulo central del pentágono regular (72º) para dibujar un polígono de 15 lados. El problema clásico se refiere al caso general de un ángulo cualquiera.

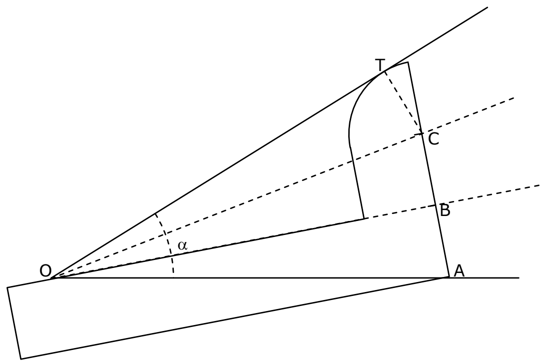
Los matemáticos griegos, grandes geómetras, estudiaron profundamente este problema pero no consiguieron resolverlo. Tras muchos fracasos llegaron a obtener una solución aproximada con un procedimiento complicado, pero sabían perfectamente que el problema matemático seguía sin solución.

Una variación sencilla del procedimiento consiste en utilizar un aparato similar a una escuadra de carpintero para, apoyándolo sobre los lados del ángulo, obtener su trisección. Éste consiste en algo parecido a una L en la que los dos brazos tienen la misma anchura (arbitraria), y el lado pequeño tiene una longitud triple que la anchura y acaba en un cuadrante de circunferencia. En la siguiente figura se indican mejor los detalles.



siendo AB=BC=CD=CE=MN=a y DE es un arco de circunferencia con centro en C.

Se puede dividir el ángulo AOT=α en tres partes utilizando este instrumento de la siguiente manera:

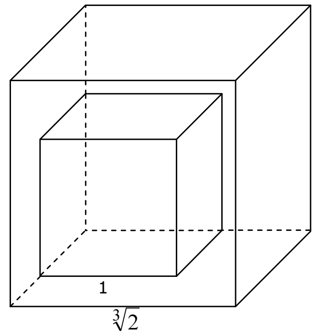


El aparato se desplaza y gira sobre el ángulo de tal manera que quede con el vértice del ángulo en un punto de la parte superior del "mango" y, al mismo tiempo, A debe quedar situado en un lado del ángulo, siendo el otro lado tangente interior al arco DE. Los tres triángulos OAB, OBC Y OCT son rectángulos y tienen la misma hipotenusa y el cateto menor, luego los ángulos son iguales a la tercera parte de α.

Aunque la solución técnica es muy buena y sencilla, el hecho de que el aparato se tenga que apoyar sobre un punto que no resulta perfectamente determinado con procedimientos geométricos no satisface las exigencias matemáticas, por lo que se siguió buscando una solución en la que solo intervinieran la regla y el compás, solución que nunca llegó.

(b) Duplicación del cubo

Consiste en la construcción, con regla y compás, de un cubo cuyo volumen sea el doble del de otro conocido. Para simplificar, se puede suponer que el primero tiene lado unidad, con lo que el problema se "reduce" a buscar la forma de construir un segmento que sea la arista de un cubo de volumen 2, o sea, de longitud $\sqrt[3]{2}$. Aparentemente, también es un problema accesible pero, por más que se intentó, la solución siempre se resistía.



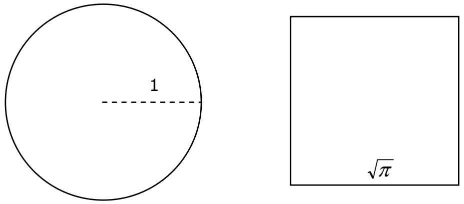
La solución de estos problemas se intentó de forma más o menos continua hasta bien entrado el siglo XIX en que se demostró que las soluciones no existían. Para entender muy superficialmente cómo se llegó a demostrar, podemos decir que se puede demostrar que un número es constructible (es decir, se puede construir con regla y compás un segmento cuya longitud sea el número dado) si es solución de una ecuación polinómica de coeficientes racionales cuyo grado sea uno, dos o una potencia de dos.

Así, el problema geométrico se transforma en un problema algebraico en el que se estudia si un determinado número puede o no ser solución de una ecuación del citado tipo.

En el caso de la duplicación del cubo, la ecuación más sencilla (de menor grado) que tiene como solución $\sqrt[3]{2}$ es $x^3 - 2 = 0$, de tercer grado, por lo que al no ser una potencia de dos no se puede construir un segmento cuya medida sea $\sqrt[3]{2}$ y el problema no se puede resolver.

(c) Cuadratura del círculo

Este problema pedía construir un cuadrado cuya superficie fuese la de un círculo dado. Como antes, se puede considerar que su radio sea 1, así, hay que construir un cuadrado de área π, o sea, un segmento que mida $\sqrt{\pi}$. En **13** hemos visto fácilmente cómo construir la raíz cuadrada de un número, por lo que si π fuera un número constructible también lo sería su raíz cuadrada. Así, el problema geométrico se transforma en otro de tipo algebraico.



Este caso fue bastante más laborioso, pero al final se demostró que el número π no solamente no era constructible sino que tampoco era solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales y de cualquier grado, concepto que recibe el nombre de número trascendente.

De esta manera se cerraban matemáticamente los tres grandes problemas clásicos. No obstante, bastante después de resolverse estos problemas, seguían entregándose Memorias en las Academias de Ciencias en las que se "demostraba" alguno de éstos, de ahí que haya pasado al lenguaje corriente la frase "cuadrar el círculo" como sinónimo de "resolver algo imposible".

Notas finales

1. La propiedad **17** recibe el nombre de teorema de Napoleón porque, siendo ya general, fue quien en una discusión con los matemáticos Lagrange y Laplace les comunicó el resultado. Según cuenta la historia fue este último quien expresó la frase famosa: "Sire, lo último que esperábamos de vos era que nos dierais una lección de Geometría", pero lo que no sabemos es si Napoleón llegó a demostrar el resultado.

Puede parecer raro que un militar como Napoleón pudiera descubrir propiedades geométricas que nadie había descubierto hasta entonces, pero parece ser que en alguna víspera de batalla se relajaba considerando algún problema geométrico. Además, en aquella época en las Escuelas Militares se impartía una formación matemática bastante exigente, hecho que se fomentó mucho más con la creación de la famosa École Polytechnique, donde los mejores matemáticos enseñaban en sus aulas y se debía demostrar un alto nivel matemático para poder ser admitido.

Esta "Grande École", muy selectiva, sigue existiendo aunque los militares del Ejército ya no salgan de ella. A pesar de todo, y aunque parezca raro o paradójico, sigue conservando el espíritu militar como una tradición y sus estudiantes son considerados como cadetes, desfilando en lugar privilegiado, con su bello traje de gala del siglo XIX, en el desfile del 14 de julio (fiesta nacional de Francia). Las Écoles Polytechniques son consideradas todavía como una de las glorias de Francia, y de éstas suelen salir la gran mayoría de los mejores políticos y dirigentes del país. De su nivel de exigencia da idea el hecho de que si un estudiante fracasa en éstas (aunque sea en primer curso), puede acceder directamente a un tercer curso de una universidad francesa, pero también es cierto que para poder entrar en aquéllas ha debido superar un examen de ingreso muy duro para el que se ha tenido que preparar unos dos años.

2. El tiempo del que se disponía y el nivel de la audiencia (3º ESO) nos han obligado a tratar solo superficialmente y a dejar sin demostración algunos puntos cuyo interés matemático e histórico es bastante mayor del apuntado en estas líneas, y a olvidarnos necesariamente de otros que nos hubiera gustado compartir.

Si esta aproximación geométrica anima a algunos lectores a profundizar en el tema el objetivo fijado estará sobradamente cumplido. De ser así, recomendamos las siguientes páginas web en inglés para iniciarse (su calidad compensa sobradamente el pequeño esfuerzo de comprensión que puedan requerir), en ellas se pueden encontrar vínculos interesantes para ampliar:

http://mathworld.wolfram.com/GeometricConstruction.html

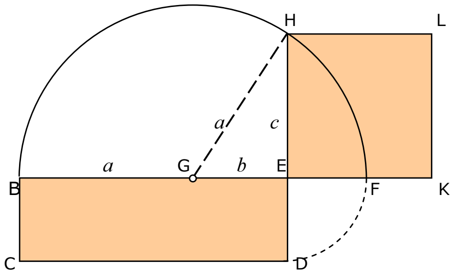
http://www.mathsisfun.com/geometry/index.html

Anexo

Presentamos algunos ejemplos sencillos de cuadraturas interesantes, así como una demostración del teorema de Pitágoras (una de las trescientas y pico que se conocen).

1. Cuadratura de un rectángulo

La cuadratura de un rectángulo consiste en, dado un rectángulo BCDE, obtener un cuadrado EHLK que tenga la misma área. La Geometría clásica pide que el trazado se haga con regla y compás.
En la siguiente figura aparece el procedimiento para cuadrar el rectángulo BCDE (EF=DE). Deduce cuáles son los pasos a seguir y justifica la igualdad de las áreas.

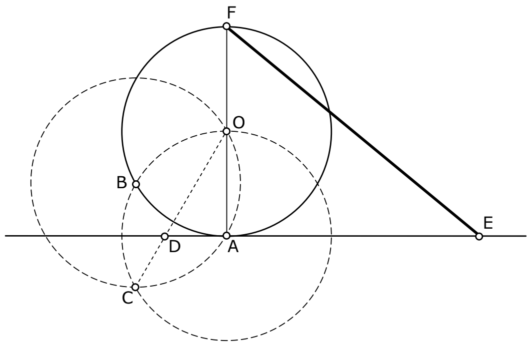


2. Cuadratura de un triángulo

¿De qué manera se puede cuadrar un triángulo? (Bastará reducir el problema a buscar un rectángulo que tenga la misma área que el triángulo: $S = \frac{b \cdot h}{2}$).

3. Cuadratura del círculo. Aproximación de Kochanski

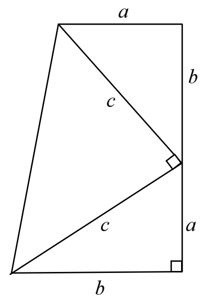
Como se ha visto en el texto, la cuadratura del círculo equivale a resolver el problema de trazar (con regla y compás) un segmento de longitud π, Entre los numerosos intentos que se realizaron, hay uno bastante sencillo debido a un jesuita polaco, cuyo procedimiento de construcción es:



donde A(0,0), O(0,1) y F(0,2). Los círculos C_1, C_2 centrados en O y A se cortan en B. Sea C_3 el círculo de centro B y radio 1, C la intersección de C_2, C_3, y D el punto de corte de CO con el eje x. Finalmente se construye E de tal manera que DE=3, entonces EF es, aproximadamente, π (el valor que se obtiene es de $\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3'14133...$) (Es fácil ver que AOB y BAC son equiláteros y que D es el baricentro de este último, de donde DA resulta ser $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Utilizar el problema 10).

4. (Otra) Demostración del teorema de Pitágoras

Del teorema de Pitágoras se conocen más de 300 demostraciones distintas. Como curiosidad damos a continuación una de 1876 debida a James Garfield, quien después sería presidente de los Estados Unidos.
Del trapecio de la figura se deduce que su área es:



$$\frac{1}{2}(\Sigma bases) \cdot altura = \frac{1}{2}(b+a)(a+b)$$

o sumando cada triángulo por separado

$$\frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{1}{2}c^2$$

identificando las dos expresiones resulta, tras simplificar:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Problemas

Construcción de figuras. Ángulos

1. Del triángulo ABC se sabe que a = 4 cm, B = 30º y b = 5 cm, calcula un valor aproximado del ángulo A.

2. Calcula aproximadamente los lados y los ángulos del triángulo ABC, rectángulo en A, del que conocemos el cateto AC = 15 cm y AD = 12 cm, altura relativa a la hipotenusa.

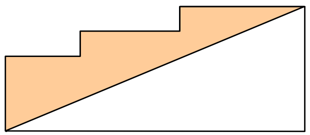
3. En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo aproximado se ve la portería desde ese punto?

4. (a) El vértice de un ángulo es un punto exterior a una circunferencia, y sus lados cortan a ésta. Probar que la medida del ángulo es la semidiferencia de los arcos de circunferencia interiores al ángulo.

(b) El vértice de un ángulo es un punto interior a una circunferencia. Probar que el ángulo es la semisuma de los arcos, siendo uno de ellos el cortado por el ángulo en la circunferencia y el otro por las extensiones de sus lados.

Triángulos. Teorema de Pitágoras

5. Tres cuadrados de lados 3, 4 y 5 dm respectivamente, están situados uno junto al otro como se ve en la figura. Halla el área de la figura sombreada.



6. Demuestra que las mediatrices de un triángulo ABC se cortan siempre en un punto (llamado circuncentro, o centro de la circunferencia circunscrita).

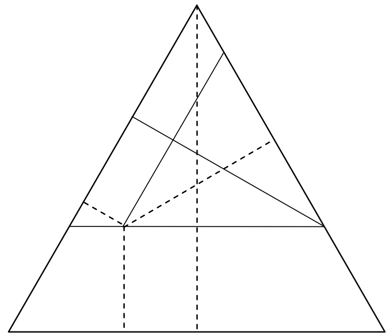
7. (a) Demuestra que las medianas de un triángulo se cortan en un punto, que las divide precisamente en la relación 1:2. (Conviene tener presente esta propiedad, se utiliza con cierta frecuencia).

(b) Prueba que las medianas de un triángulo lo dividen en seis partes equivalentes (con la misma área).

8. Comprueba que en un triángulo equilátero ABC de lado a, la altura mide $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, y que si G es el baricentro: $AG=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

9. La longitud del lado de un octógono regular es 8 cm. Halla el área del octógono y los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita.

10. Prueba que la suma de distancias desde cualquier punto interior de un triángulo equilátero a sus lados es igual a la altura del triángulo (utiliza el dibujo siguiente).

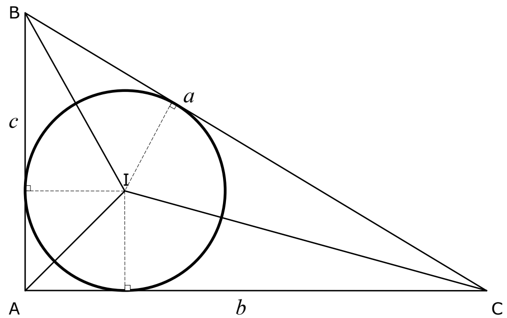


11. Sea ABC un triángulo rectángulo de hipotenusa a y catetos b y c. Halla:

a. Radio de la circunferencia circunscrita.

b. Radio de la circunferencia inscrita. Demuestra que: $r=\frac{bc}{a+b+c}=\frac{1}{2}(b+c-a)$.

c. Distancia desde el vértice del ángulo recto al punto más cercano del círculo inscrito.



Máximos y mínimos

12. Dos postes de 12 y 8 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

13. De todos los rectángulos de diagonal 10 dm, halla las dimensiones del que tenga el mayor área. (Un problema equivalente sería obtener las dimensiones del rectángulo de una determinada área cuya diagonal deba ser mínima).

14. Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm y, uniendo sus extremos, se forma un triángulo. Determina el instante entre las 12 h y las 12 h 30 min en el que el área del triángulo es máxima.