RALLYE MATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

SOLUCIONES

PRUEBA

2000

1.- UNA BUENA MEDIDA

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones siendo x e y los dos números:

$$\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=\frac{37}{4} \\ 2x-y=\frac{45}{5} \end{cases}$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x+2y=37 \\ 2x-y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=37 \\ 4x-2y=18 \end{cases}$$

Sumando obtenemos 2x=55, luego x=11

Sustituyendo obtenemos y=13

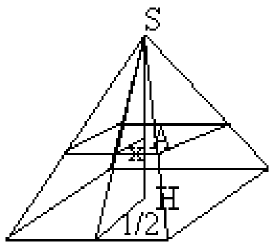
En el alfabeto las siglas correspondientes son: **k m**

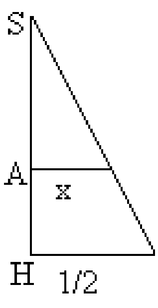
2.- ¡APROVECHEMOS LA DISMINUCIÓN DE IMPUESTOS!

En 1999 la factura se obtenía como 1,16x siendo x el valor de la factura sin IVA. En 2000 es 1,04x . Comparamos ambos resultados: $\frac{1,04x}{1,16x}=0,8966$ índice de variación. Luego la factura ha bajado un 1-0,8966=0,1034 es decir un **10,34%**

3.- UNA PIRÁMIDE APETITOSA.

Nuestro trozo de chocolate tendrá el aspecto siguiente del que se han dibujado los dos triángulos semejantes siendo x la mitad del lado de la base cuadrada de la pirámide superior que queda al cortar:





Aplicamos el teorema de Thales y obtenemos:

$$\frac{SA}{10} = \frac{x}{\frac{1}{2}}$$

Despejando obtenemos SA=20x

Por otro lado, aplicamos la fórmula del volumen de una pirámide ($V = \frac{1}{3} l^2 h$) a la pirámide pequeña:

$$V = \frac{1}{3}(2x)^2(20x)$$

El volumen de la pirámide grande es:

$$V = \frac{1}{3}(1)^2(10) = \frac{10}{3}$$

Como cada trozo debe tener la mitad del volumen:

$$\frac{5}{3} = \frac{1}{3}(2x)^2(20x)$$

De donde: $x = \sqrt[3]{\frac{5}{80}} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

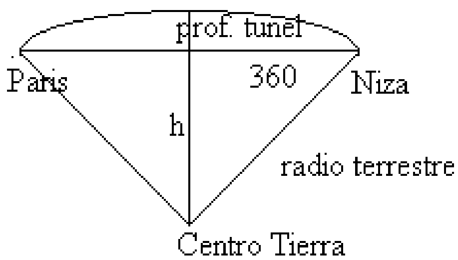
Por tanto:

$SA = 20\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{10}{\sqrt[3]{2}} = \frac{10\sqrt[3]{2^2}}{2} =$ **$5\sqrt[3]{4}$cm=7,9 cm**

4.- ¿UNA MOSCA DOPADA?

El tiempo que la mosca está volando coincide con el tiempo que les cuesta al ciclista y motorista encontrarse. Este tiempo es el que le cuesta a un móvil que va a (30+50) km/h recorrer los 320 km que es de 4 horas (320/80). Como la mosca viaja a 60 km/h, en cuatro horas habrá recorrido 60x4=**240 km.**

5.-EL TÚNEL



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo con hipotenusa 6400 km y cateto horizontal 360 km (la mitad de la distancia entre Paris y Niza)

Obtenemos:

$$h = \sqrt{6400^2 - 360^2} = 6389{,}867\ km$$

Restamos este valor al radio de la Tierra y obtenemos la profundidad buscada:

6400-6389,867=**10,133 km**

Especial Cuarto de ESO

6.- LA REQUETEMILMILLONÉSIMA

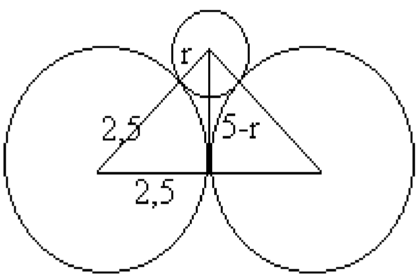
Tenemos en cuenta que 1000=$(2.5)^3$ y que 2000=$2^4.5^3$ por lo que $\frac{1000^{2000}}{2000} = \frac{2^{3^{2000}}5^{3^{2000}}}{2^4 5^3} = \frac{2^{6000}5^{6000}}{2^4 5^3} = 2^{5996}5^{5997} = 5.10^{5996}$

Por tanto el número total de cifras es 5996+1=**5997 cifras**

7.- LA SORPRESA DEL CHEF

Los tomates tienen como diámetro 10/2=**5 cm**

Para obtener el diámetro de los calabacines, llamamos r a su radio y aplicamos Pitágoras en el siguiente triángulo.



Los catetos son: 2,5 y 5-r y la hipotenusa es r+2,5

$$2{,}5^2 + (5 - r)^2 = (2{,}5 + r)^2$$

$$6{,}25 + 25 + r^2 - 10r = 6{,}25 + r^2 + 5r$$

$$25 - 10r = 5r$$

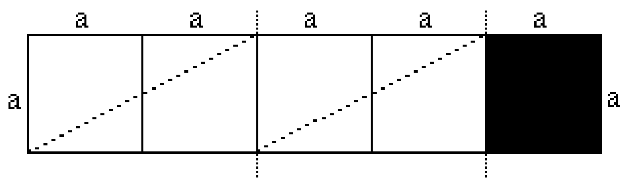
$$r = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

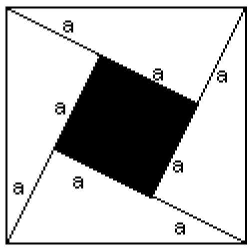
El diámetro del calabacín es $\boldsymbol{\frac{10}{3}\,cm}$**=3,3 cm**

Especial Cuarto de ESO

6.- ¡A LAS TIJERAS!

A la izquierda se indica con líneas discontinuas donde se deben realizar los cortes en la bufanda y a la derecha como quedaría el pañuelo:



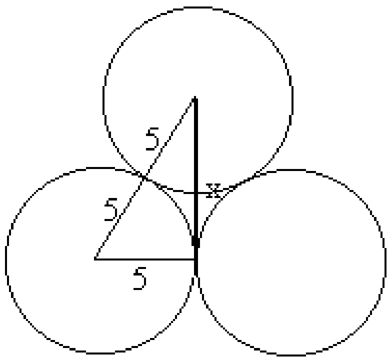


Para llegar a ello pensamos que el área total de la bufanda es $5a^2$ y el área del cuadrado debe ser la misma. Así se tiene $l^2 = 5a^2$ por lo tanto el lado del cuadrado será $l = \sqrt{5}\,a$. Esto nos puede sonar al teorema de Pitágoras: $\sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5}$ a. Con esto probamos que el lado del pañuelo se obtendrá como la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos a y 2a. Así trazamos dos cortes para obtener esos triángulos y los otros dos cortes para separarlos obteniendo cuatro triángulos rectángulos cuyas hipotenusas serán los lados del cuadrado y, un cuadrado de lado a. Todo ello lo encajaremos, como si de un puzzle se tratara, situando en el medio el cuadrado de lado a tal como indica la figura.

7.- LAS BOTELLAS

1- En la alineación B de la figura 2 so observa que el botellero tiene una anchura para albergar a 5 botellas y media. Como cada botella tiene 10 cm de diámetro se tiene que a=10.5,5=55 cm

2.- Se observa que dos filas de botellas en la disposición A necesitan 10x2=20 cm de altura mientras que en la disposición B basta con $10+5\sqrt{3}$ = 18,66 cm:



Por Pitágoras x = $\sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$

Por tanto, con la altura **18,66 cm** tenemos 2 filas de botellas en la disposición A y 1 en la disposición B (ya que no llega a 20cm para tener la segunda fila)