PROGRAMAS DIDÁCTICOS IBERCAJA

LOS DIEZ RETOS DEL DOCTOR TEO REMA

CUADERNO DE ACTIVIDADES

INICIATIVA EDUCA de Ibercaja

CONSTRUIR SU FUTURO ES COSA DE TODOS

iberCaja
Obra Social

Desde siempre, la Obra Social de Ibercaja colabora con padres y educadores, poniendo a su disposición propuestas que contribuyen a completar la educación de los más jóvenes.

A través de la línea INICIATIVA EDUCA de Ibercaja, buscamos prevenir el fracaso escolar y el abandono prematuro de los estudios y formar a los profesionales del mañana.

Bajo este nombre, presentamos Los diez retos del Doctor Teo Rema, un Programa Didáctico que propone descubrir algunas de las incógnitas matemáticas más divertidas.

¡Descúbrelo!

PROGRAMAS DIDÁCTICOS IBERCAJA

LOS DIEZ RETOS DEL DOCTOR TEO REMA

FICHA TÉCNICA

Programas Didácticos Ibercaja

Reservas: programasdidacticos.ibercaja.es

Cuaderno de actividades

Edita: Ibercaja Obra Social.

Textos: Pedro J. Miana. Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones. Universidad de Zaragoza.

ÍNDICE

INICIATIVA EDUCA de Ibercaja, construir su futuro es cosa de todos.

INTRODUCCIÓN

Hola, amigos.

Os presentamos al Doctor Teo Rema. Hace mucho tiempo, Teo era profesor de Matemáticas en un colegio pequeño, enseñando a alumnos como vosotros. Le encantaba enseñar matemáticas, ya que las amaba y sospechaba que el mundo que nos rodea, como decía Galileo, está escrito en lenguaje matemático.

Un buen día decidió vender su casa, dejar su trabajo y viajar por el mundo. Le costó abandonar su colegio y sus alumnos, pero pensó que aprender más matemáticas, surgidas de los problemas de la gente, era un bonito desafío. Preparó su bolsa, sus cuadernos, sus tizas y marchó a recorrer caminos, a conocer nuevos pueblos y a aprender.

Ahora ya es una persona mayor. Su cabello es canoso, pero sigue estando alborotado. Os trae 10 retos que él ha aprendido y ha conseguido resolver. ¿Seréis vosotros capaces de resolverlos también?

Os presentamos un recorrido adaptado a vuestra formación. En grupos reducidos de 4 ó 5 compañeros tendréis que enfrentaros a cada prueba y encontrar la solución en un tiempo fijado. Al sonar el timbre, tendréis que cambiar de prueba y pasar a la siguiente.

Deseamos que en esta hora disfrutéis y trabajéis. Agredecemos a todas las personas que han creído y colaborado en esta iniciativa aportando sus acertados comentarios para mejorar y llegar a esta versión definitiva.

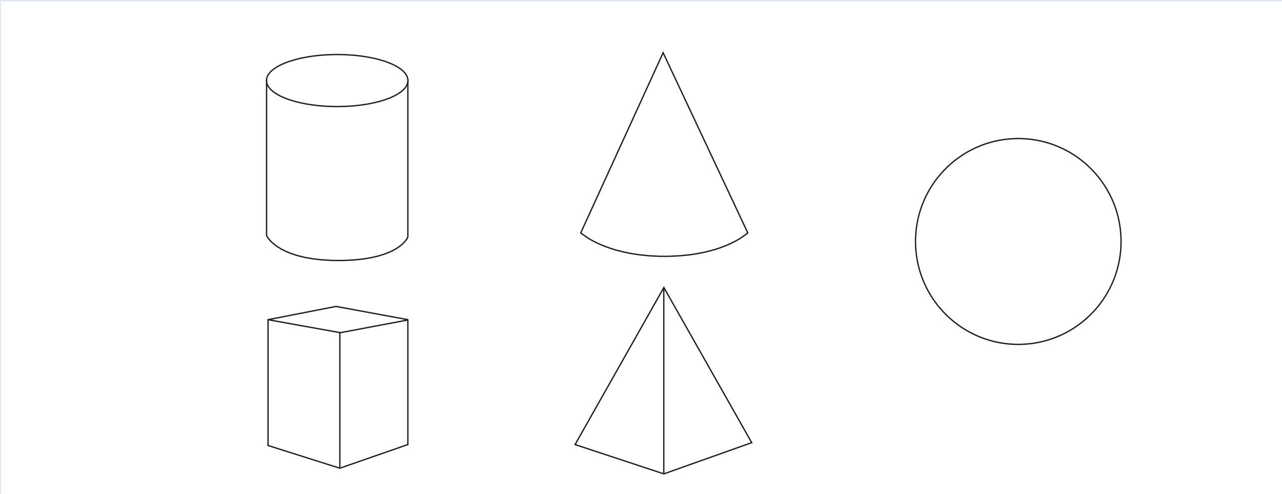
Doctor Teo Rema diseñado por Anna Gallego.

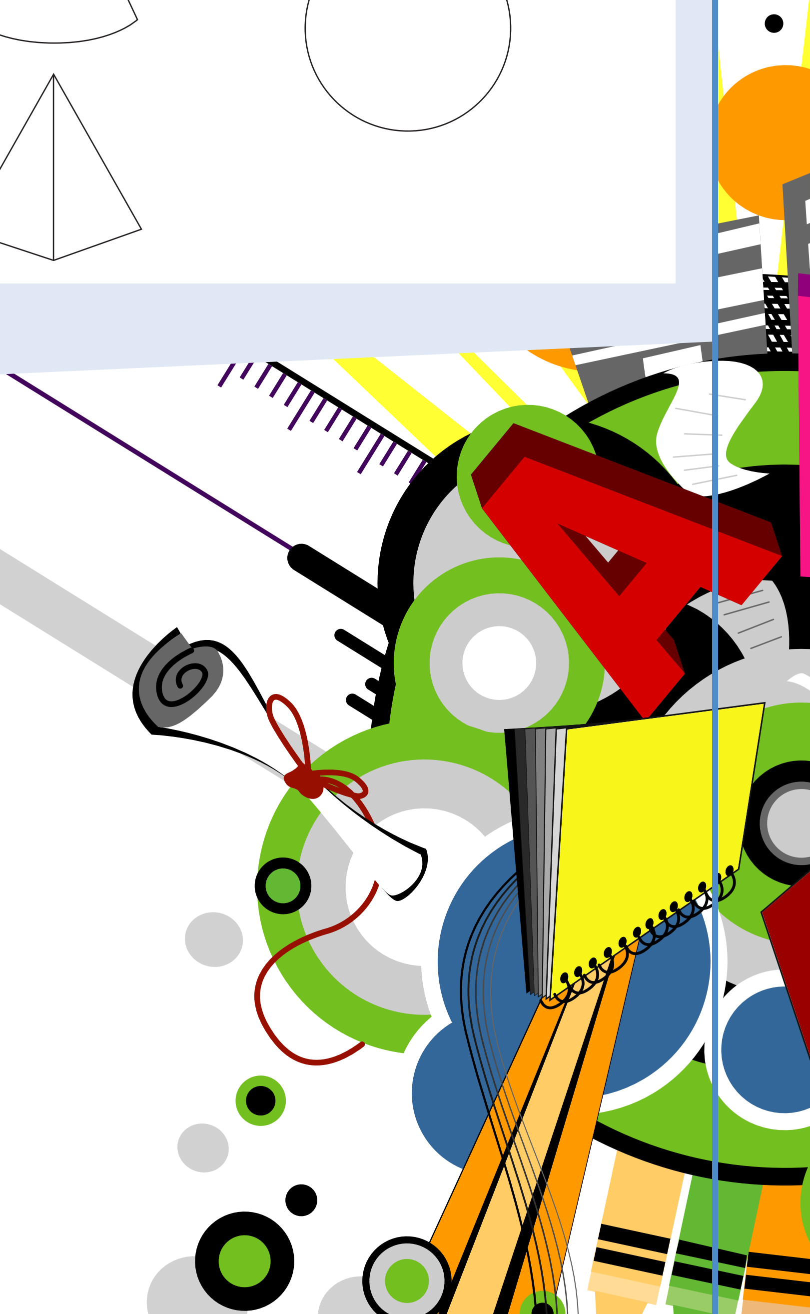
1° RETO: ¿QUÉ ES MÁS PESADO?

Edad: 13 - 14 años (2° - 3° E.S.O.)

Presentación: Delante de ti dispones de 6 figuras geométricas, 3 prismas (de base cuadrada) y 3 cilindros, una balanza y un metro. Todas miden 10 cm de altura. Observa las figuras, cógelas, compáralas y mídelas. ¿Intuyes alguna relación entre los pesos de estas figuras?

Reto: Investiga qué relación hay entre los pesos de los tres prismas. Paralelamente, encuentra una relación entre los pesos de los tres cilindros. ¿A qué es debido el equilibrio de los pesos de estas figuras? ¿Importa la altura de las figuras? ¿Importa la forma geométrica de las figuras? ¿Se cumpliría este equilibrio con conos semejantes? Comprueba matemáticamente tus intuiciones.



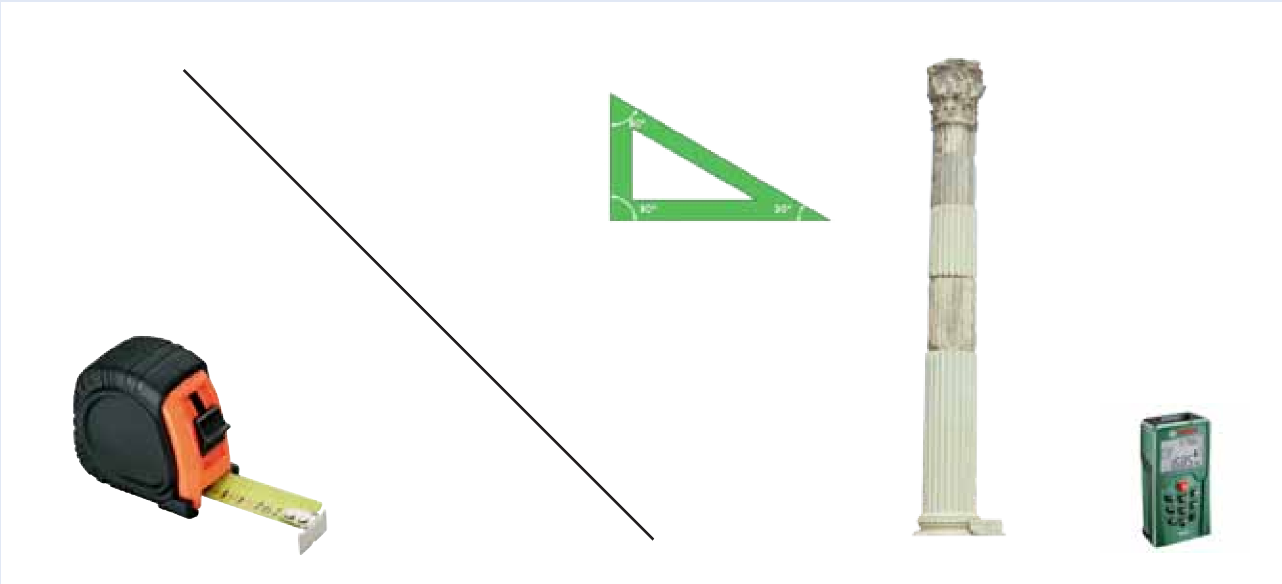


2º RETO: ¿CUÁNTO MIDE ESTA PIRÁMIDE?

Edad: 13 - 14 años (2º - 3º E.S.O.)

Presentación: No hemos podido montar una pirámide dentro de la sala, pero sí esta columna. Disponemos de una vara, un flexómetro, un láser y un cartabón.

Reto: ¿Cómo podemos medir la altura de esta columna? ¿Y de la habitación?



3° RETO: ¿CUÁNTAS PAREJAS DE CONEJOS TENEMOS?

Edad: 13 - 14 años (2° - 3° E.S.O.)

Presentación: En las últimas navidades, nuestro tío Fibo y nuestra tía Nacci nos han regalado una pareja de conejos. La pareja tarda un mes en alcanzar la madurez reproductiva y dan a luz a una nueva pareja de conejos cada mes.

Reto: Completa la siguiente tabla con los doce primeros meses:

Mes	Parejas padres	Parejas hijos	Parejas totales C_n
1 mes	0	1	1
2 mes	1	0	1
3 mes			
4 mes			
5 mes			
6 mes			
7 mes			
8 mes			
9 mes			
10 mes			
11 mes			
12 mes			

¿Cuántas parejas de conejos tenemos al final del primer año? Si C_n **y** C_{n+1} son las parejas de conejos que tenemos en los mes **n** y **n + 1**, ¿cuál es el valor de C_{n+2}?

Completa las siguientes igualdades de esta sucesión mágica:

$$2C_n - C_{n-2} =$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \ldots + C_n =$$

Calcula el cociente C_{n+1}/C_n completando la siguiente tabla

C_2/C_1	C_3/C_2	C_4/C_3	C_5/C_4	C_6/C_5	C_7/C_6
C_8/C_7	C_9/C_8	C_{10}/C_{11}	C_{11}/C_{10}	C_{12}/C_{11}	

¿Intuyes a qué valor se aproxima el cociente **Cn+1/Cn** al aumentar el valor de **n**?

4° RETO: ¿CUÁNDO ACABARÁ EL MUNDO?

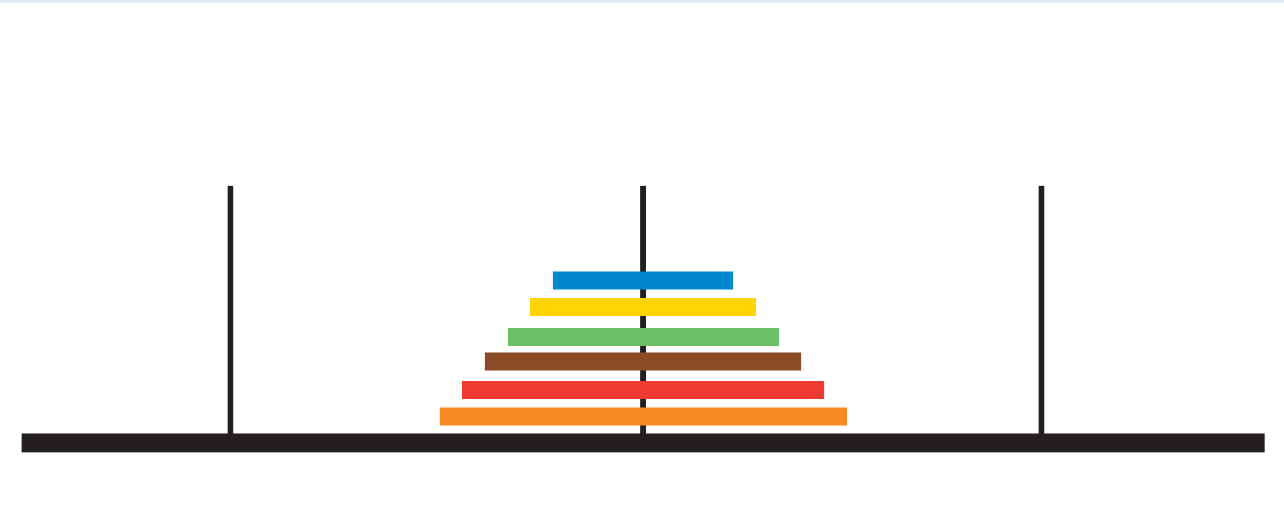
Edad: 15 - 16 años (4° E.S.O. - 1° Bachillerato.)

Presentación: Cuenta la leyenda de las Torres de Hanoi que Dios, al crear el mundo, creó un monasterio con monjes budistas. En el monasterio colocó tres varillas de diamantes, y en la primera de las varillas, colocó 64 discos de oro de diámetros decrecientes en sentido ascendente. El mundo acabará cuando los monjes consigan pasar todos los discos de una varilla a otra cumpliendo las siguientes reglas:

1. Sólo se puede mover un disco cada vez.
2. Un disco de mayor tamaño nunca puede descansar sobre uno de menor tamaño.
3. Sólo se puede desplazar el disco que se encuentra en la parte superior de cada varilla.

Reto: Te presentamos una reproducción simplificada de las Torres de Hanoi, sin discos de oro ni varillas de diamantes. Te proponemos que pases todos los discos de una varilla a otra cumpliendo los tres reglas impuestas a los monjes budistas. Te sugerimos que empieces primero con 3 discos, luego con 4, y así sucesivamente. Anota cuántos movimientos de discos haces. ¿Hay alguna relación entre el problema con 4 discos y el problema con 3 discos? ¿Y entre el problema con 5 discos y el problema con 4 discos?

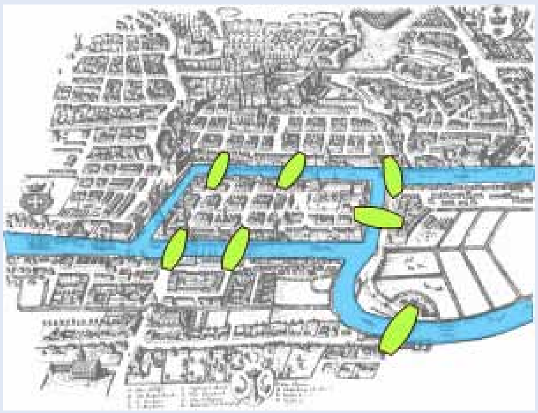
Si tenemos **n** discos, ¿cuántos son el número mínimo de movimientos que tenemos que hacer? En el caso de los monjes y sus 64 discos, si tardan 1 segundo en realizar un movimiento, ¿cuántos años crees que tardarían en mover los 64 discos?



5° RETO: ¿NOS DAMOS UN PASEO?

Edad: 15 - 16 años (4° E.S.O. - 1° Bachillerato.)

Presentación: En primavera, con el buen tiempo, al Doctor Teo Rema le encanta pasear. Hoy ha recordado el siguiente reto que le propusieron en 1736 al genial matemático Leonhard Euler, el problema de los puentes de Königsberg. Euler vivía en Königsberg (actual Kaliningrado) y uno de los atractivos de la ciudad era pasear por el centro, recorriendo los siete puentes del río Pregolya. Le plantearon a Euler si era posible recorrer los siete puentes pasando sólo una vez por cada uno de ellos y regresando al punto inicial del paseo.

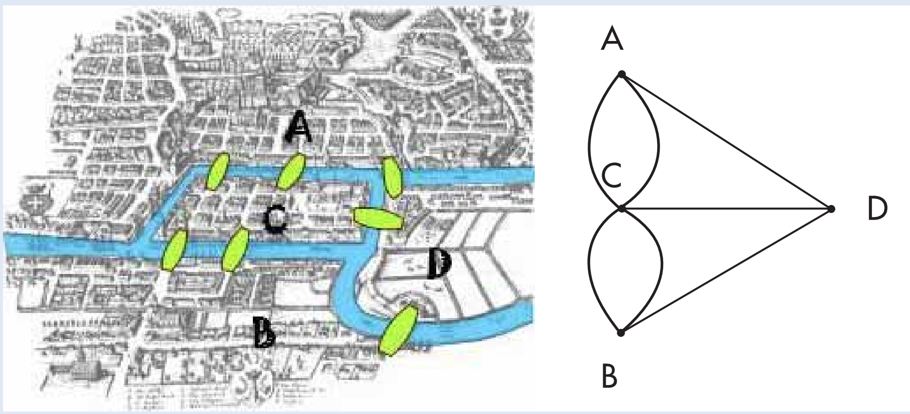


http://es.wikipedia.org/wiki/Problema de los puentes de Königsberg

Reto: Os proponemos que respondáis al problema de los puentes de Königsberg. Intentad durante varios minutos encontrar un camino que, pasando solamente una vez por cada uno de los puentes, os permitirá regresar al punto inicial. Podéis pensar también si es posible hacer un camino pasando por todos los puentes una sola vez y terminando en un punto diferente al inicial.

Como seguro que no lo habéis logrado, os damos alguna ayuda, recorriendo los pasos dados por Euler. Podemos representar con las letras **A, B, C, y D** cada uno de las tierras, y cada puente por una línea.

¿Podéis razonar para demostrar que no hay ningún recorrido que cumplan las condiciones impuestas?



6º RETO: ¿CUÁNTOS COLORES NECESITAMOS?

Edad: 13 - 14 años (2º - 3º E.S.O.)

Presentación: Aunque no existen ni fronteras ni países en la naturaleza, al ser humano le gusta marcar su territorio estableciendo límites, fronteras y pasaportes. En cualquier mapa, países o regiones se pintan de colores distintos si comparten frontera.

Reto: Os proponemos que coloreéis el mapa de las comarcas de Aragón con el mínimo número de colores posibles, con la única condición que dos comarcas que compartan una línea en su frontera tengan colores diferentes.

7º RETO: ¿CÓMO PODEMOS GANAR SIEMPRE?

Edad: 13 - 14 años (2º - 3º E.S.O.)

15 -1 6 años (4º E.S.O. - 1º Bachillerato.)

Presentación: En la sociedad actual en la que vivimos, nos enseñan e incluso nos educan para ganar siempre. Sin embargo, alguien debería decirnos que la mayoría de las veces vamos a perder. En este juego de mesa, que llamaremos El 20 gana, tenemos 20 fichas del mismo color y pueden participar dos jugadores o dos equipos de jugadores. En cada turno, cada jugador puede retirar 1 o 2 fichas. El jugador que retire la última ficha es el ganador de la partida.

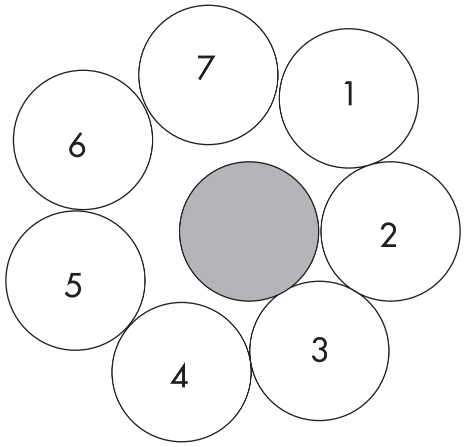
Reto: ¿Cuál de los dos jugadores, el primero o el segundo en jugar, tiene ventaja? ¿Cómo hay que jugar para ganar siempre? ¿Qué sucede si se varía el número de fichas? ¿Y si se varía el objetivo, de modo que el que retira la última ficha, pierde?

8° RETO: ¿CUÁNTOS BESOS RECIBIMOS?

Edad: 15 - 16 años (4° E.S.O. - 1° Bachillerato.)

Presentación: En matemáticas, se afirma que dos superficies se besan si se tocan en un solo punto. En este reto consideramos espacios de dimensión dos (el plano) y dimensión tres (el espacio).

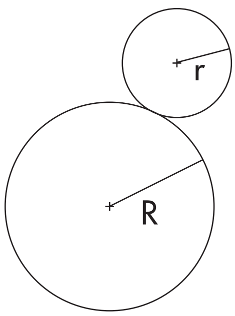
Se denomina el número de besos de una **figura A** al número de figuras (idénticas a A) que se pueden colocar sin superponer y que besen a la figura A.



En la figura anterior, sólo el **círculo 2 y 3** besan al círculo central.

Reto: Calcula el número de besos de un círculo en el plano, es decir, ¿cuántos círculos iguales a uno dado se pueden colocar que sean tangentes al primero? ¿Sabrías dar una explicación matemática de este hecho?.

Hagámoslo un poco más difícil. Ahora tenemos circunferencias de radios **R** y **r.** ¿Podrías dar una relación entre **R** (radio de la circunferencia central) y **r** (radio de las circunferencias exteriores) para que alrededor de la primera se puedan colocar exactamente **n** circunferencias exteriores sin dejar espacio libre entre ellas con **n** un número natural?



9° RETO: ¿CÓMO CONSEGUIMOS 4 LITROS?

Edad: 13 - 14 años (2° - 3° E.S.O.)

Presentación: Los números naturales son la base de nuestro conocimiento matemático, y por tanto de nuestra sociedad. Nos han enseñado a sumar, restar, multiplicar e incluso dividir. Aparecen de una forma continua y obsesiva a nuestro alrededor. En el siguiente reto te proponemos que consigas el número 4 a partir de 3 y 5.

Reto: Disponemos una fuente y las siguientes dos botellas de 3 y 5 litros respectivamente.

Nuestro reto será conseguir 4 litros exactos en la botella de 5. Disponemos de la botella de 3 y de una báscula para comprobar el resultado.

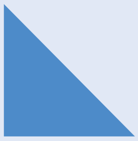
10º RETO: ¿CUÁNTAS CENEFAS DISTINTAS DISEÑAMOS?

Edad: 13 - 14 años (2º - 3º E.S.O.)

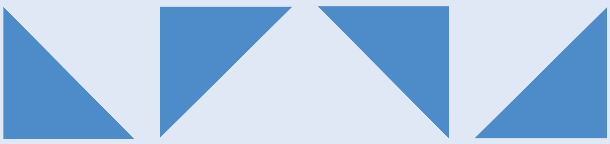
15 - 16 años (4º E.S.O. - 1º Bachillerato.)

Presentación: Una cenefa es un elemento decorativo, por lo general largo y estrecho, que se coloca en una pared u objeto, rodeando su perímetro o parte de él. A menudo se colocan en cocinas o baños para romper la monotonía y serenidad de la decoración base. Evidentemente, existen infinidad de cenefas que podemos diseñar; tal vez la siguiente configuración es la más sencilla:

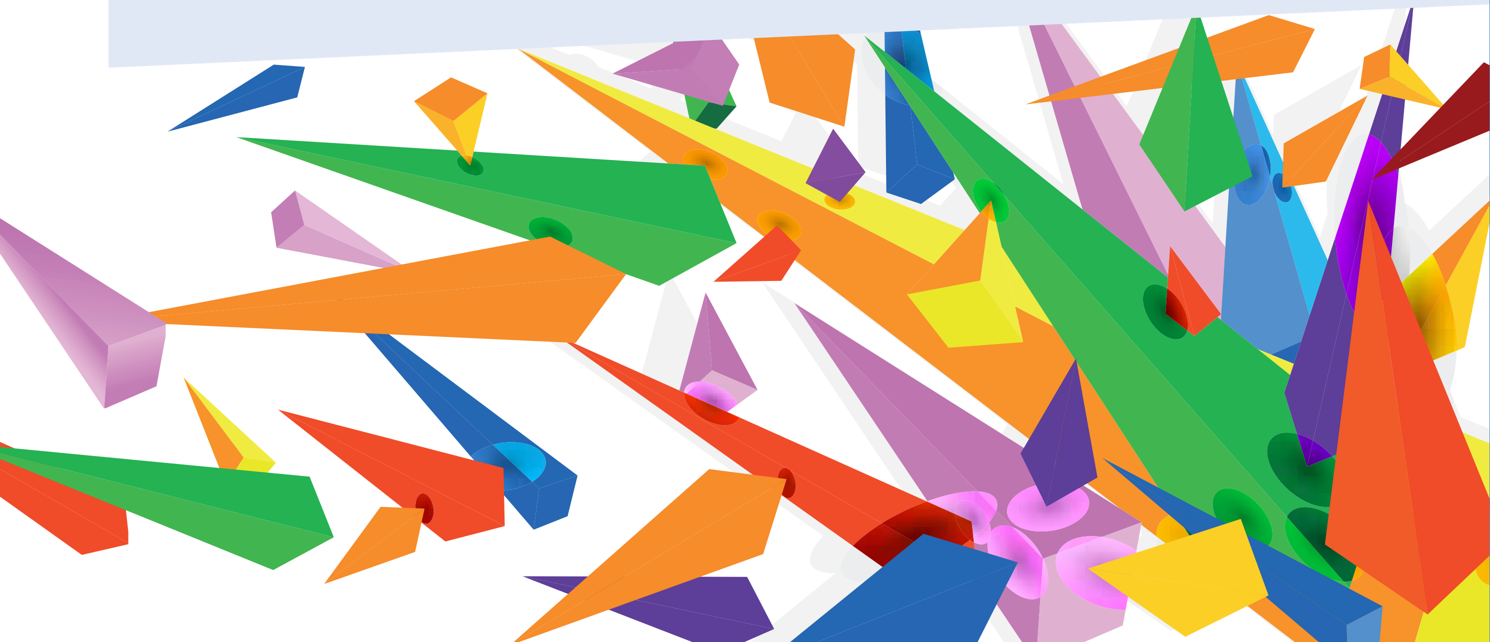
En todas ellas hay un elemento patrón que al repetirse da lugar a la cenefa (también llamado friso). En el caso anterior, el elemento patrón es:



Sobre este elemento patrón nos tenemos que fijar para identificar los movimientos geométricos que lo dejan fijo. Existen cuatro movimientos que en el plano pueden dejar fijo al elemento patrón: traslaciones, giros o rotaciones, simetrías axiales y combinación de traslación y simetría axial. En nuestro caso, los giros de 90º no dejan fijo al elemento patrón:



Reto: Os proponemos que diseñéis los 7 tipos diferentes de cenefas que se pueden construir con estos mini azulejos. Se pueden poner dos filas de azulejos para diseñar las cenefas. ¿Seréis capaces de encontrarlas todas? Os recordamos que basta dar el elemento patrón e identificar los movimientos geométricos ya comentados o su ausencia. Se entienden por cenefas matemáticamente distintas si los movimientos que fijan al elemento patrón son distintos.



SOLUCIONES

1° RETO: ¿QUÉ ES MÁS PESADO?

Solución: Consideremos los prismas. El volumen de un prisma es **$V = b^2h$,** donde **b** es el lado del cuadrado y **h** la altura del prisma. Por tanto, se cumple que **$V + V' = V''$**, es decir:

$$b^2h + (b')^2h = (b'')^2h$$

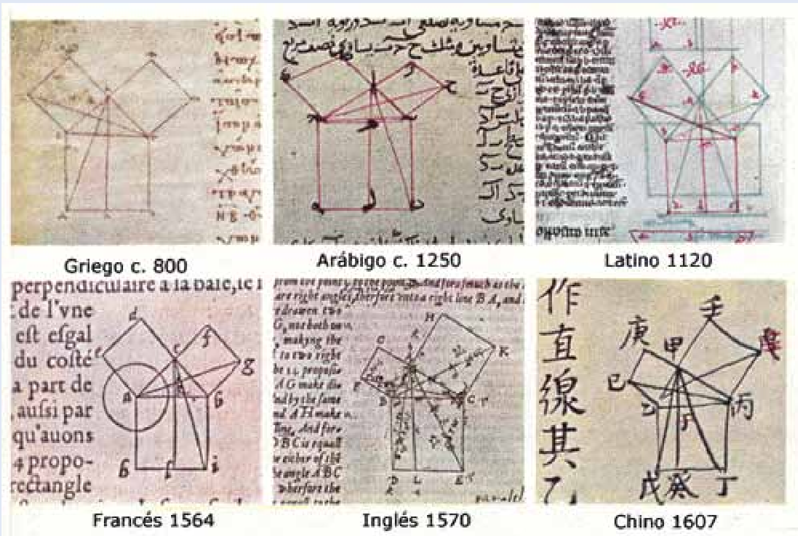
Simplificando la altura, nos queda la igualdad **$b^2 + (b')^2h = (b'')^2$**. Los números **(b, b', b'')** que cumplen está condición se llaman ternas pitagóricas. Estas ternas heredan su nombre del teorema de Pitágoras. Recordemos que el teorema de Pitágoras afirma que en un triángulo rectángulo el cuadrado del valor de lado mayor (hipotenusa, en este caso **b''**) es igual a la suma de los cuadrados de los valores de los lados menores (catetos, **b y b'**). Similarmente se razona en el caso de los cilindros, teniendo en cuenta que en este caso el volumen **$V = \pi r^2 h$**, donde **r** es el radio de la base.

Luego el equilibrio en la balanza se debe a que los lados (radios) de las bases forman una terna pitagórica, **$b^2 + (b')^2 = (b'')^2$**. La altura no influye en el resultado, e incluso la forma geométrica tampoco, siempre y cuando se cumpla adecuadamente el teorema de Pitágoras. Por tanto, para conos cuyos radios de las bases formen una terna pitagórica se cumplirá también la igual de las masas.

Para saber más: Existen 16 ternas primitivas (sin factores comunes entre sus elementos) formadas con números menores de 100, las cuatro primeras son:

$$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25) \text{ y } (8, 15, 17)$$

El teorema de Pitágoras es uno de los más conocidos del mundo matemático. Algunos autores han llegado a coleccionar hasta más de 1.000 demostraciones diferentes de este resultado. Su origen es incierto, y era conocido por las primeras civilizaciones de la humanidad (Mesopotamia, Egipto, India, China…) antes del nacimiento de Pitágoras (aproximadamente, 580 a.C - 495 a.C).



http://identidadgeek.com/explicar-el-teorema-de-pitagoras-en-un-minuto/2011/02/

En 1637 Pierre de Fermat, leyendo sobre las ternas pitagóricas en el libro de Arithmetica de Diofanto, afirmó que dado un número natural **$n > 2$**, no existen números naturales **(a, b, c)** tales que:

$$a^n + b^n = c^n$$

Este teorema, conocido como el último teorema de Fermat, resistió más de 350 años hasta que Andrew Wiles ayudado por Richard Taylor lo demostraron en 1995.

2° RETO: ¿CUÁNTO MIDE ESTA PIRÁMIDE?

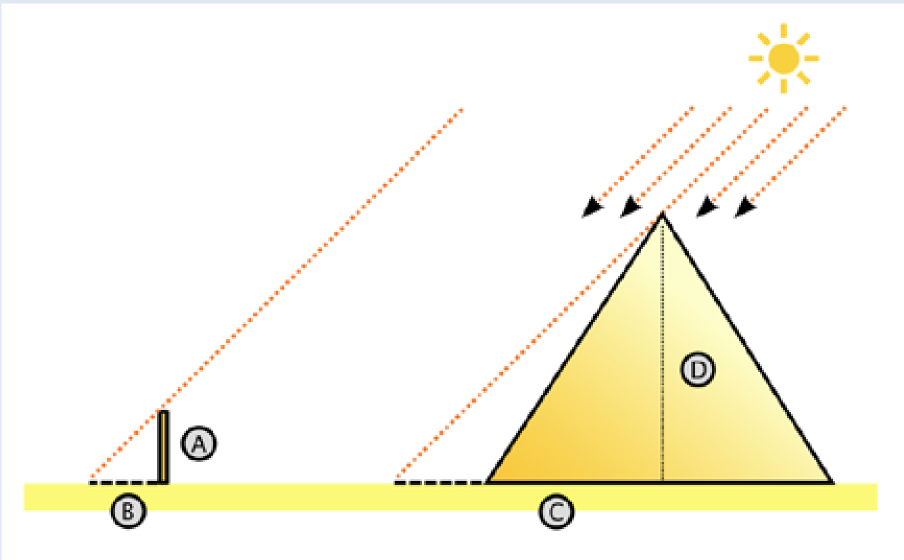
Solución: Llamemos a la altura de la columna **x**. Colocamos la vara (de longitud **l**) paralela a la columna y a la distancia de la columna, tal que el láser con el ángulo adecuado incida en el extremo superior de la columna. Marcamos ese punto y medimos la distacia **y**. A continuación, buscamos la distancia en el suelo de modo que el láser situado en el suelo incida con el mismo ángulo en la vara. Marcamos ese segundo punto y medimos la distancia a la columna por **z**. Con los datos **l, y, z** podemos deducir la altura **x**.

El teorema de Thales afirma que si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes. En este caso, tenemos dos triángulo semejantes en que los lados paralelos son la columna y la vara, y por tanto se cumple la igualdad del cociente de los lados semejantes:

$$\frac{x}{l} = \frac{y+z}{z}$$

de donde deducimos el valor de **x**. Análogamente calcularemos la altura de la habitación.

Para saber más: Habitualmente se conocen por teorema de Thales dos principios diferentes. El primero es el ya comentado, mientras que el segundo afirma que todo triángulo construido sobre el diámetro de una circunferencia y con sus tres vértices en la circunferencia es un triángulo rectángulo. Thales de Mileto (630 a.C - 545 a.C.) es el primero de los Siete Sabios de Grecia, y posiblemente Pitágoras fue uno de sus alumnos. Se le atribuye a Thales el transporte desde Egipto a Grecia de múltiples conocimientos y herramientas en geometría. Según la leyenda (contada por Plutarco), en un viaje a las pirámides de Guiza en Egipto consiguió medir la altura de las pirámides utilizando su primer teorema.



http://es.wikipedia.org/Teorema de Tales

Por último, existe una canción popular titulada Teorema de Thales (divertimento matemático, 1967) en el primer disco "Sonamos, pese a todo" de 1971 del grupo argentino Les Luthiers. Puedes encontrar una versión en Youtube:

http://www.youtube.com/watch?gl=ES&hl=es&v=czzj2C4wdxY

3º RETO: ¿CUÁNTAS PAREJAS DE CONEJOS TENEMOS?

Solución: Notemos que en cada mes tenemos tantas parejas padres como parejas totales en el mes anterior, y tantas parejas hijos como parejas padres hay en el mes anterior. Así, en el mes $n + 2$ las parejas totales que tenemos se calculan sumando las parejas totales de los dos meses anteriores. Por tanto, la ley de recurrencia del problema es la siguiente:

$$C_{n+2} = C_n + C_{n+1} \quad n \geq 1$$

y con las condiciones iniciales $C_1 = 1$ y $C_2 = 1$. Por tanto, la solución es la conocida sucesión de Fibonacci:

$C_1 = 1$; $C_2 = 1$; $C_3 = 2$; $C_4 = 3$; $C_5 = 5$; $C_6 = 8$; $C_7 = 13$; $C_8 = 21$; $C_9 = 34$; $C_{10} = 55$; $C_{11} = 89$; $C_{12} = 144$.

Así al final del año, tendremos 144 parejas de conejos. Esta sucesión de números naturales cumple interesantes igualdades, entre ellas:

$$2C_n - C_{n-2} = C_{n+1}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \ldots + C_n = C_{n+2} - 1,$$

estas otras: $C_1 + C_3 + C_5 + \ldots\ldots C_{2n} - 1 = C_{2n}$,

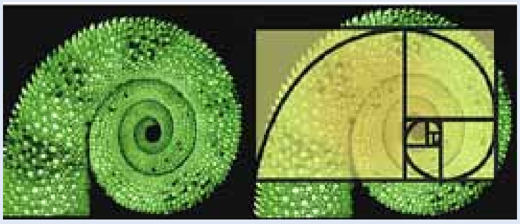
$$C_{n+1}C_{n-1} - C_n^2 = (-1)^n \text{ (Identidad de Cassini)},$$

y existen muchas más. Una de las propiedades más conocidas es su relación con la proporción áurea Φ

$$\Phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_n \frac{C_{n+1}}{C_n}$$

Para saber más: Leonardo de Pisa (c. 1170-1250), conocido por Fibonacci, fue un matemático italiano, autor del libro Liber Abaci, publicado en 1202. Este libro introdujo en la Europa occidental el sistema de numeración árabe (el que actualmente empleamos). En este libro aparece la sucesión de Fibonacci (llamada así por el matemático francés del siglo XIX, Édouard Lucas) como solución a un problema de cría de conejos.

La sucesión de Fibonacci aparece (aunque no tan a menudo como se cree) en configuraciones biológicas: ramas de árboles, disposición de las hojas en un tallo, en las conchas de ciertos moluscos o en la cola del camaleón, como indica la siguiente figura:



http://www.lhup.edu/~dsimanek/pseudo/fibonacc.htm

Existen numerosos volúmenes, publicaciones y entradas en la red sobre la sucesión de Fibonacci y la razón aúrea Φ; en particular, nos gustaría señalar el siguiente video del zaragozano Cristóbal Vila:

http://www.wimp.com/fibonaccisequence/

4° RETO: ¿CUÁNDO ACABARÁ EL MUNDO?

Solución: Denotaremos por M_n el número mínimo de movimientos que debemos hacer para terminar el juego, por **A**, **B** y **C** las tres varillas, y enumeramos los discos desde el **1** al **n**, empezando por la cima. Es claro que para **n = 2**, tenemos que hacer tres movimientos, $M_2 = 3$. Ahora tenemos 3 discos en la varilla **A**, movemos el **disco 1** de **A** a **C**; a continuación el **disco 2** de **A** a **B** y el **disco1** de **C** a **B**. Movemos el **disco 3** de **A** a **C**, el **disco 1** de **B** a **A** y el **disco 2** de **B** a **C**. Para terminar, el **disco1** de **A** a **C,** y ya hemos terminado, $M_3 = 7$. Notemos que en un paso intermedio hemos necesitado conseguir una torre de dos disco para poder desplazar el último disco.

Es claro que este juego es un proceso iterativo, y para resolver el caso **n = 4**, reduciremos al caso **n = 3**. Movemos los tres primeros discos como hemos hecho en el caso anterior. A continuación, movemos el **disco 4** de la varilla **A** a la varilla **B**, y ahora tendremos que mover los tres discos de la varilla **C** a la varilla **B**. Es fácil comprobar que $M_4 = 7 + 7 + 1 = 15$.

Sospechamos que si tenemos **n** discos, entonces tenemos que hacer $2^n - 1$ movimientos, $M_n = 2^n - 1$. Para demostrar esto, aplicamos el método de inducción. Para **n = 1**, entonces se cumple $M1 = 1$. Suponemos cierto que $M_n = 2^n - 1$ y consideramos a continuación el caso **n + 1**. Es claro que primero hemos de cambiar los n primeros discos de la varilla A a la varilla **B** (**Mn** $= 2^n - 1$ **movimientos**) y dejar la varilla **C** libre. A continuación, movemos el disco **n + 1** de **A** a **C** (1 movimiento más) y por último, movemos los **n** discos de la varilla **B** a la varilla **C** ($2^n - 1$ **movimientos**),

$$M_n+1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

En el caso de 64 discos, tenemos que $M^{64} = 264 - 1$ movimientos y por tanto los monjes tardarían $2^{64} - 1$ segundos, que son, aproximadamente, 585 mil millones de años. Recordemos que la Tierra se calcula que tiene alrededor de 5 mil millones de años y el Universo entre 15 y 20 mil millones de años.

Para saber más: Édouard Lucas(1842-1891) era un matemático francés de increíble talento y habilidad con los números. Como muestra, mencionaremos que en 1876 llegó a probar que el número de Mersenne $2^{127} - 1$ es primo, el mayor número primo conocido hasta mediados del siglo XX y el mayor calculado sin ayuda de ordenador.

Lucas también estudió las sucesiones generalizadas de Fibonacci, aquellas que empiezan con dos números enteros cualesquiera y se consigue el siguiente, sumando los dos anteriores. En particular, para la sucesión de Fibonacci (ver Reto 3), probó la conocida fórmula:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

donde **fn** es el término general de la sucesión de Fibonacci. Lucas tiene su propia sucesión, la sucesión engredada por **1 y 3: 1, 3, 4, 7, 11, 18...**

Era un entusiasta de las matemáticas recreativas. Inventó en 1883 el juego (y la leyenda) de las Torres de Hanoi, que él mismo comercializó bajo el pseudónimo de Prof. N. Claus de Siam, mandarín del Colegio de Li-Sou-Stian. Ambos nombres son anagramas de Lucas d'Amiens y del instituto en que enseñaba Saint Louis.

Para saber más sobre las matemáticas que encierran las torres de Hanoi, recomendamos las lecturas de los artículos de Javier Serrano Mora y Rodolfo Valeiras:

http://olmo.pntic.mec.es/ aserra10/articulos/hanoi.html

http://www.rodoval.com/heureka/hanoi/index.html

5° RETO: ¿NOS DAMOS UN PASEO?

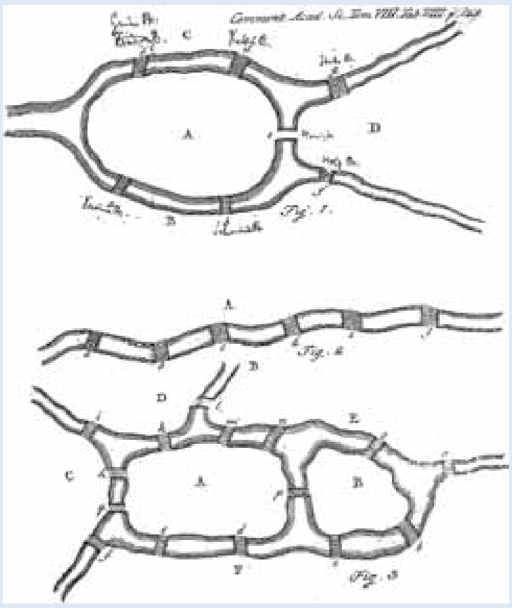
Solución: En matemáticas, un grafo es un conjunto de puntos (vértices o nodos, en nuestro problema, las cuatro tierras **A, B, C, y D**) unidos por líneas (aristas, en nuestro caso, los siete puentes de Königsberg). Por tanto hemos traducido el problema inicial a un problema de grafos. Luego en nuestro grafo, tenemos **4 vértices** y **7 aristas**, y nos preguntamos si podemos recorrer el grafo completo pasando por cada arista una única vez y por cada uno de los vértices las veces que lo necesitemos.

Nos damos cuenta que hay dos tipos de vértices en el camino que recorremos sobre nuestro grafo, los vértices iniciales y finales y los vértices intermedios. En los vértices intermedios, deben concurrir un número par de aristas: debemos entrar y salir por aristas diferentes, y tantas veces como necesitamos. En los vértices iniciales y finales deben concurrir un número impar de aristas: una arista para salir o llegar y un número par de aristas para pasar por el vértice las veces que sean necesarias. En el caso que el vértice inicial y final sean el mismo (es decir, que el camino empiece y termine en el mismo vértice) entonces el número de aristas que concurren en cada uno de los vértices debe ser par.

En nuestro caso al vértice **A,B,D** llegan **3 aristas** y al **vértice C** llegan **5**. Por tanto, no hay camino alguno que recorra el grafo completo pasando por cada arista una única vez.

Para saber más: La teoría de grafos es un campo de las matemáticas (y de la computación) que estudia diversas propiedades (conexión, entre ellas) de unas estructuras abstractas llamadas grafos. Los grafos son los esqueletos de diversas configuraciones de la realidad; por ejemplo, el plano de metro de una ciudad, las páginas de Internet o incluso la estructura de un equipo de fútbol, puede ser considerados como grafos.

Este problema clásico de 1736 se sitúa como origen de la teoría de grafos. Resuelto por Euler en su trabajo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, es un bellísimo esfuerzo de la capacidad abstracta de las matemáticas y su aplicabilidad a la vida real. Euler no sólo resuelve el problema de los puentes de Könisberg, sino que con su teoría se puede resolver cualquier problema similar con configuración de puentes totalmente distinta.

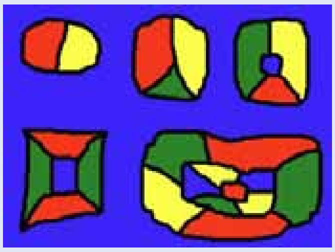


http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf

6° RETO: ¿CUÁNTOS COLORES NECESITAMOS?

Solución: Este problema es un caso particular del conocido como problema de los cuatro colores. Este teorema afirma que 4 es el mínimo de colores necesarios para colorear cualquier mapa o plano, con la única regla que dos países diferentes con frontera común han de ser pintados en colores diferentes.

Es evidente que cada mapa particular necesita un número mínimo de colores para colorearlo. Por ejemplo, en el siguiente dibujo se muestran mapas de 2, 3 y 4 colores. Es fácil ver que hay mapas que necesitan más de 3 colores para corolearlos; por ejemplo, la figura tercera de la primera columna requiere cuatro colores.



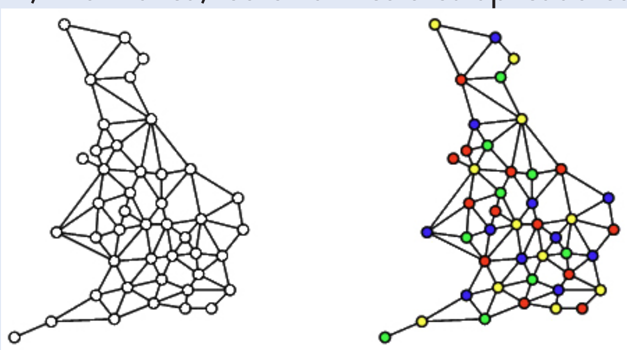
http://elmaestrodecasas.blogspot.com.es/2011/08/el-teorema-de-los-cuatro-colores.html

La pregunta que resuelve el teorema es si existe algún mapa muy complicado que nadie haya pintado ni pinte jamás, que requiera cinco colores como mínimo para corolearlo. La respuesta es clara: por muy difícil y complicado que sea el mapa, cuatro colores siempre serán suficientes.

Para saber más: El origen de teorema de los cuatro colores se data en 1852 y se debe a Francis Guthrie. Francis, con 21 años, observa que necesita cuatro colores, como mínimo, para pintar un mapa de condados de Inglaterra, con la única regla de que condados que compartan una frontera común tengan colores diferentes. Se pregunta si esto se cumplirá en cualquier mapa coloreable. A través de su hermano, le comunica sus inquietudes al matemático Augustus Morgan, quien se da cuenta que esta observación encierra tras de sí un problema matemático. Este teorema ha estado sin demostrar durante más de 120 años. Finalmente, en 1976, Kenneth Appel y Wolfgang Haken consiguieron probar con ayuda de ordenadores que cuatro colores son suficientes siempre.

En realidad, los mapas coloreables se pueden traducir en lenguaje de grafos. En este caso, los vértices son los estados o condados, y las fronteras comunes son las aristas del grafo. Vértices unidos por una arista deben estar coloreados por colores diferentes.

http://www.caerolus.com/informatica/teorema-4-colores-aplicado-compiladores.html



Para saber más, recomendamos la lectura de los siguiente artículos:

http://www.uam.es/persona_pdi/ciencias/gallardo/4ct.pdf

http://naukas.com/2012/05/23/por-que-solo-cuatro-colores/

7º RETO: ¿CÓMO PODEMOS GANAR SIEMPRE?

Solución: Este juego permite decidir una estrategia ganadora desde el principio del juego. Comencemos observando que el jugador que a lo largo de la partida deje 3 fichas sobre la mesa después de su jugada, ganará, independientemente de lo que realice el otro jugador. Procediendo hacia atrás, quien deje 6 fichas sobre la mesa también ganará; y en general, también quien deje un número de fichas múltiplo de 3 sobre la mesa. Así, podemos formular una estrategia ganadora: si en la mesa hay 20 fichas, el primer jugador ganará si quita 2 fichas en la primera jugada y si en las sucesivas jugadas va dejando una cantidad de fichas múltiplos de 3, independientemente de lo que haga el segundo jugador. Así el primer jugador tiene ventaja sobre el segundo, ya que existe una estrategia ganadora para él, mientras que el segundo dependerá para ganar de los fallos de su oponente.

La variación del número de fichas en el juego no hace cambiar la estrategia, aunque sí puede cambiar el jugador que tiene ventaja. Dado que la estrategia ganadora consiste en dejar un cantidad múltiplo de 3 de fichas, para saber cómo hemos de empezar a jugar para ganar, basta dividir el número de fichas por 3 y observar el resto que obtenemos, a saber 0, 1 ó 2. El caso de resto 2 ya ha sido analizado en el anterior párrafo. Si el resto es 1, el primer jugador deberá tomar una ficha, para dejar una cantidad múltiplo de 3 y poder ganar la partida al final. Finalmente, si el número de fichas es múltiplo de 3, entonces es el segundo jugador quien puede seguir la estrategia ganadora, mientras que el primer jugador dependerá de la actuación del segundo. Si se cambia el objetivo del juego y quien pierde es quien recoge la última ficha, hay que jugar para dejar al final 1 ficha. Por tanto, si somos el primer jugador, nuestro objetivo es dejar una cantidad de fichas que al dividir por 3 dé por resto 1.

Notemos que este juego se puede generalizar todavía más. Supongamos **m fichas** sobre la mesa, y que en cada jugada se puede retirar de**1**a **n fichas** con **n < m**. Gana la partida el jugador que retira la última ficha. ¿Para qué jugador es posible encontrar una estrategia ganadora? ¿Cuál es esta?

Para saber más: Un juego y un problema matemático tienen algo en común: plantean un desafío intelectual, un reto cuya aceptación lleva a los participantes a realizar un esfuerzo para ganar a su adversario (o resolverlo). Como dijo Miguel de Guzmán, "las matemáticas siempre son un juego, aunque además sean otras muchas cosas".

Desde la cultura babilónica, egipcia, medieval, árabe, hasta la cultura actual, los juegos lúdicos como el Senet, el Ajedrez, el cubo de Rubik, o el Sudoku, presentan retos y desafíos. La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión (Wikipedia).

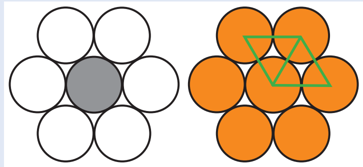
La aplicabilidad de la teoria de juegos al mundo real, y en especial al mundo ecónomico, político, social e informático, puede observarse en las contribuciones de John von Neumann, Oskar Morgenstern y, posteriormente, John Nash.

Recomendamos el libro "Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de juegos", de Jordi Deulofeu, de donde hemos extraído ideas y aportaciones de este reto. La aplicabilidad de los juegos recreativos en la enseñanza de las matemáticas puede consultarse en el blog:

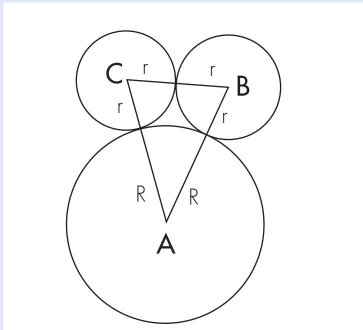
http://anagarciaazcarate.wordpress.com/

8° RETO: ¿CUÁNTOS BESOS RECIBIMOS?

Solución: Se comprueba fácilmente que alrededor de un círculo (por ejemplo, 1 euro) se pueden colocar 6 círculos, como indican las figuras siguientes.



Si unimos los centros de dos círculos exteriores adyacentes y del círculo central, se obtiene un triángulo equilátero, cuyo ángulo interior es 60°. Dividiendo el valor del ángulo central 360° entre 60°, se obtienen los 6 triángulos equiláteros y por tanto, 6 círculos exteriores tangentes.



Para radios cualesquiera, es conveniente realizar un dibujo como el siguiente.

Se puede obtener cierta acotación considerando el perímetro del polígono de **n lados** y longitud de cada lado **2r** y la circunferencia de radio **R + r.**

$$2rn < 2\pi(r+R) \qquad\qquad n < \pi\left(1+\frac{R}{r}\right)$$

Por el teorema de coseno para el triángulo **ABC**, se tiene que:

$$(2r)^2 = 2(R+r)^2 - 2(R+r)^2\cos(A) = 2(R+r)^2(1-\cos(A))$$

Dividiendo por **r** y teniendo en cuenta $A = \dfrac{360^\circ}{n}$ se obtiene:

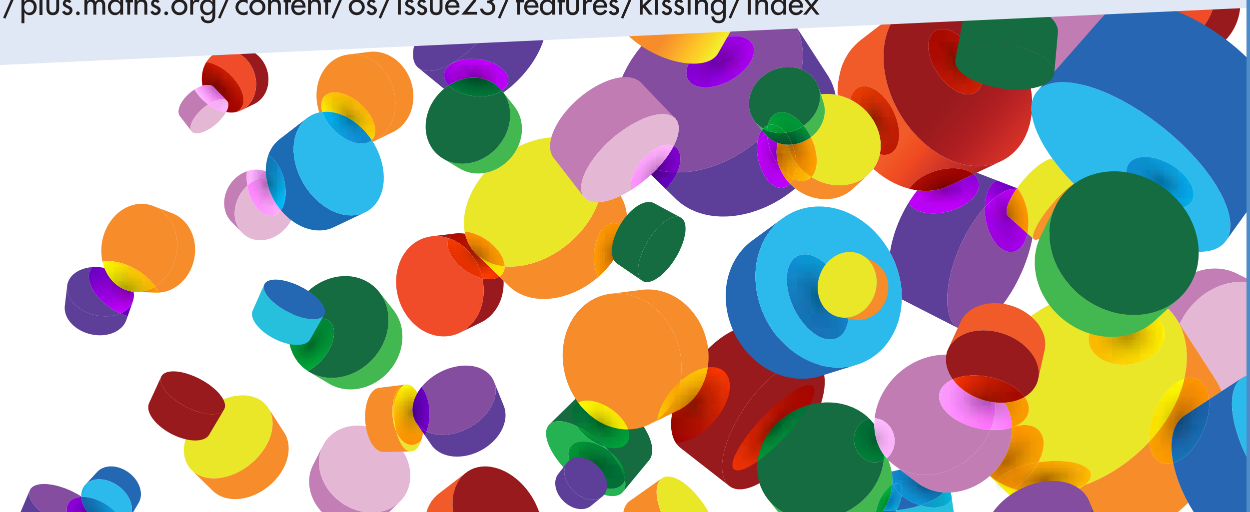
$$2 = \left(1+\frac{R}{r}\right)^2\left(1-\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\right)$$

En el caso **n = 6**, se tiene $4 = \left(1+\frac{R}{r}\right)^2$ y por tanto **r = R.**

Para saber más: El problema en el espacio todavía es más difícil que en el plano. ¿Cuántas esferas tangentes se pueden colocar alrededor de una esfera, siendo todas ellas de igual radio? I. Newton afirmaba que eran 12, mientras que D. Gregory decía que eran 13. Finalmente, en 1953 se demostró que Newton tenía razón; véase por ejemplo:

http://en.wikipedia.org/wiki/Kissing_number_problem/

http://plus.maths.org/content/os/issue23/features/kissing/index



9º RETO: ¿CÓMO CONSEGUIMOS 4 LITROS?

Solución: Existen varias formas de conseguir los **4 litros**. Explicaremos dos formas diferentes, y a continuación expresaremos nuestros movimientos con expresiones matemáticas.

1a. Llenamos la botella de **5 litros** y transferimos **3** a la botella de **3**; por tanto nos quedan **2** en la botella de **5**. A continuación vaciamos la de **3** y transferimos los **2** litros de la botella de **5** a la de **3** litros. Llenamos la botella de **5** y transferimos **1** litro a la de **3** litros, quedando por tanto **4** litros en la botella de **5** litros. En expresión matemática, y escribiendo en orden inverso al obtenido, se tiene que:

$$4 = 5 - 1 = 5 - (3 - 2) = 5 - (3 - (5 - 3)) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3$$

2a. Llenamos la botella de **3 litros** y transferimos su contenido a la de **5** litros. Volvemos a llenar la de **3** litros y rellenamos la de **5** litros con **2**, sobrándonos en la de **3** litros, solamente **1** litro. Vacíamos la de **5** litros, trasvasamos este litro de la de **3** a la de **5** y llenamos de nuevo la de **3** litros. Por último juntamos en la botella de **5** litros, el litro inicial con los **3** litros. En expresión matemática, se escribe:

$$4 = 1 + 3 = (3 - 2) + 3 = (3 - (5 - 3)) + 3 = 3 \cdot 3 - 5$$

Para saber más: Una de las consecuencias del algoritmo de la división es el llamado algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos números **a, b**. Como consecuencia del algoritmo de Euclides, se puede escribir el máximo común divisor de dos números **d = m.c.d(a,b)** como combinación lineal de **a** y **b**; es decir, existen **l** y **n** números enteros (positivos o negativos) tales que:

$$d = l \cdot a + n \cdot b$$

En el ejemplo anterior, **1 = m.c.d(5, 3)**; es decir, son primos entre sí, y se cumple que:

$$1 = 2 \cdot 3 - 5$$

En términos de botellas, consiste en obtener **1** litro llenando la de **3** litros, trasvasando su contenido a la de **5**, llenando la de **3** de nuevo y transfiriendo **2** litros hasta completar la de **5**; al final nos queda **1** litro en la de **3** litros. Por tanto **4 = 8·3 - 4·5**, que equivale a realizar cuatro veces la operación anterior. En este caso, hay que notar que se necesita un vasija adicional para ir almacenando cada litro obtenido.

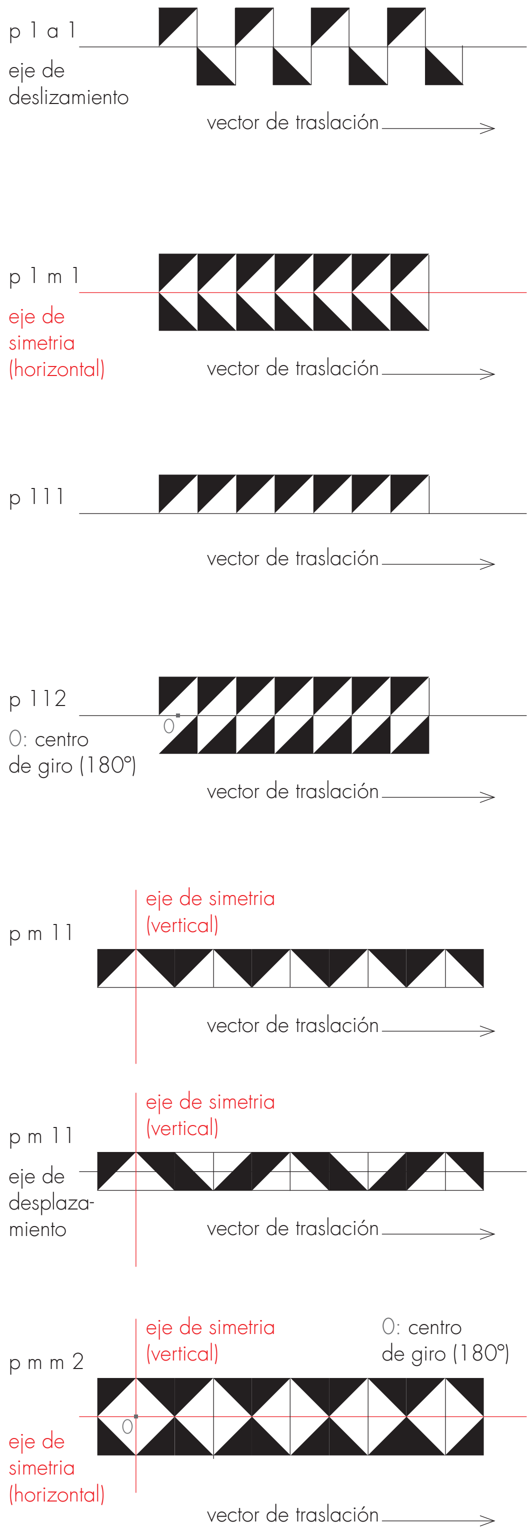
No obstante, como hemo visto anteriormente, no existe unicidad en la expresión lineal de **4** como combinación (lineal) de **5** y **3,** y por tanto existen múltiples soluciones. Este problema **c** aparece planteado en la película "La jungla de cristal 3" (1995). No obstante, en el tratado clásico Los elementos de Euclides (a.C, 300 aprox.) ya aparece el algoritmo de Euclides (Libro VII, Proposición 1).

Fragmento de los Elementos, Oxirrinco, hacia el año 100 a.C.

http://es.wikipedia.org/wiki/Elementos_de_Euclides

10° RETO: ¿CUÁNTAS CENEFAS DISTINTAS DISEÑAMOS?

Solución: Existen 7 cenefas diferentes, que indicamos a continuación.



http://www.iescomercio.edurioja.org/file.php/1/Proyectos/Russell_en_20Atenas/teselaciones.htm

REF.: 9093/1-13 Caja de Ahorros y Monte de Piedad de Zaragoza, Aragón y Rioja. Ibercaja. R.M. de Zaragoza (T. 1194. F.23 H.Z. 4862, Inscrip. 1) CIF.: G50000652. Editado en enero de 2013.

ibercaja Obra Social

programasdidacticos.ibercaja.es

Instituto Universitario de Investigación
de Matemáticas
y Aplicaciones
Universidad Zaragoza

EXCELENCIA EUROPEA 500+ PUNTOS EFQM