

Preparación para la XLIX Olimpiada Matemática Española

Abel Naya Forcano y Adrián Franco Rubio

23 de Noviembre de 2012

1. Se esparce una cierta cantidad de pintura negra sobre el suelo blanco de una habitación cuadrada de dimensiones 2×2 metros. Demostrar que hay dos puntos del mismo color cuya separación es exactamente un metro.

(Dossiers de l'Olympiade Française de Mathématiques)

2. Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30.

(Fase Local 2008)

3. Dado un entero $k \geq 1$, definimos a_k como el número entero que en base diez se escribe:

$$a_k = \overbrace{11 \dots 1}^k$$

Demostrar que a_k divide a a_l si y sólo si k divide a l .

(Fase Local 2007).

4. Escribo en la pizarra 14 números enteros, no necesariamente distintos, que verifican la propiedad de que al borrar cualquiera de ellos, puedo agrupar los trece restantes en tres montones de igual suma.

a) Demuestra que cada uno de los catorce es múltiplo de 3.

b) ¿Es posible que alguno de los catorce que he escrito no sea el 0?

(Fase Local 2002)

5. Considérese la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determinéense las dos últimas cifras de a_{2000} .

(Fase Local 2000)

6. Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n .

(OME 2012).

7. Encontrar todos los pares (p, q) de números primos tales que

$$p^q + q^p$$

es también un número primo.

(Deutsche Mathematik-Olympiade 2011/2012)

8. Tenemos una colección de esferas iguales que apilamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas n esferas. Calcular, en función de n , el número total de puntos de tangencia (contactos) entre las esferas del montón.

(Fase Local 2011/2012)

9. Inicialmente hay m bolas en una bolsa, y n en otra, donde $m, n > 0$. Se permiten dos operaciones distintas:

a) Retirar un número igual de bolas de cada bolsa.

b) Duplicar el número de bolas en una de las bolsas.

¿Es siempre posible vaciar ambas bolsas tras una secuencia finita de operaciones?

Ahora reemplazamos la operación *b)* por la siguiente:

b') Triplicar el número de bolas en una bolsa.

¿Es ahora siempre posible vaciar ambas bolsas tras una secuencia finita de operaciones?

(British Mathematical Olympiad, 2011/2012)