TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO 26/10/12

OLIMPIADA MATEMÁTICA

PROBLEMAS FASE LOCAL Y NACIONAL 2004 Y FASE LOCAL 2007

Mª ESTHER GARCÍA GIMÉNEZ

Problema 1 (2004)

Encontrad todas las funciones $f : N \to N$ tales que $f\left(f\left(n\right)\right) = n+2$ para todo número natural *n*.

Problema 2 (2004)

Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden el mismo eje, Demostrad que el triángulo es acutángulo.

Problema 3 (2004)

Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados).

Problema 4 (2004)

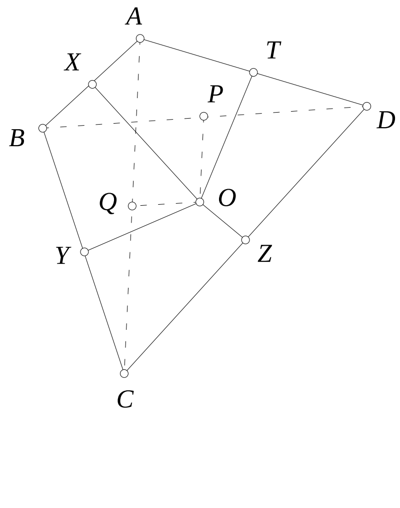
Demostrad que si $-1 < x < 1, -1 < y < 1$, $\left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right| \leq \dfrac{|x|+|y|}{1+|xy|}$

Problema 5 (2004)

Consideramos los polinomios $P\left(x\right) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q\left(x\right) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si *a, b, c* son las tres raíces de *P*, las de *Q* son $\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{b+c}{2}$. Determinad todos los posibles polinomios *P*, *Q*.

Problema 6 (2004)

ABCD es un cuadrilátero cualquiera, *P* y *Q* los puntos medios de las diagonales *BD* y *AC* respectivamente. Las paralelas por *P* y *Q* a la otro diagonal se cortan en *O*.
Si unimos *O* con las cuatro puntos medios de los lados *X, Y, Z* y *T* se forman cuatro cuadriláteros, *OXBY, OYCZ, OZDT* y *OTAX*.
Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.



Problema 7 (2007)

Sea $a_n = 1 + n^3$ la sucesión {2, 9, 28, 65, . . .} y $\delta_n = \mathrm{mcd}\left(a_{n+1}, a_n\right)$ Hallar el máximo valor que puede tomar δ_n.

Problema 8. (2007)

Sean *a, b, c, d* números enteros positivos que satisfacen *ab* = *cd*. Demostrar que *a* + *b* + *c* + *d* no es un número primo.

SOLUCIONES: Tomadas de la página http://www.unizar.es/ttm/olimpiada/index.html

Problema 1

Solución:
Sea f una función que cumple las condiciones del enunciado.
Sea $f(1) = a$. Reiterando obtenemos $f(a)=3,\ f(3)=a+2,\ldots,\ f(n)=n+a-1$ si n es impar.
Sea $f(2) = b$. De igual manera, $f(b)=4,\ f(n)=n+b-2$ si n es par.
De hecho, las condiciones $f(a)=3,\ f(b)=4,\ f(n)=n+a-1$ si n es impar, $f(n)=n+b-2$ si n es par, son necesarias y suficientes para que se cumpla la condición dada en el enunciado.
Para proseguir, debemos distinguir si a y b son pares o impares.
Si a es impar, $3=f(a)=2a-1.$ Luego $a = 2$, hecho contradictorio.
Si b es par, $4=f(b)=2b-2$. Lugo $b = 3$, hecho contradictorio.
Así, a es par y b impar. Se tiene $3=f(a)=a+b-2,\quad 4=f(b)=a+b-1$. En ambos casos, obtenemos $a + b = 5$.
Nuevamente las cinco condiciones $f(n)=n+a-1$ si n es impar, $f(n)=n+b-2$ si n es par, a es par, b es impar, $a + b = 5$ son necesarias y suficientes para que f cumpla la condición dada.
Las únicas posibilidades son, o bien $a = 2$, $b = 3$; $a = 4$, $b = 1$. en un caso obtenemos

$$f(n)=n+1 \text{ para todo } n\in N$$

En el otro,

$$f(n)=\begin{cases} n+3 & \text{si } n \text{ es impar;} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Problema 2.

Solución.
Sean A, B, C los vértices del triángulo. Denotamos, respectivamente, x, y, z las distancias de los vértices al origen de coordenadas; y, también respectivamente, a, b, c las longitudes de los lados opuestos a los vértices.

Basta probar que uno de los ángulos es agudo. Probaremos que $\cos\hat{A}>0$. Por el teorema del coseno $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$. Luego debemos demostrar que $a^2<b^2+c^2$.
Gracias al teorema de Pitágoras, se tiene que $a^2=y^2+z^2, b^2=x^2+z^2, c^2=x^2+y^2$.
Por tanto

$$b^2+c^2=2x^2+y^2+z^2>y^2+z^2=a^2\ .$$

Problema 3.

Solución.
Hay que rellenar 3 apuestas:
En 14 partidos, hay un resultado (1, X o 2) que se repite al menos 5 veces (en caso contrario, el número de partidos sería menor o igual qie 4·3 = 12, pero 14 > 12). Hacemos las tres apuestas que siguen: todo 1, todo X, todo 2. En una de ellas tenemos al menos 5 aciertos.
Por otra parte, si hacemos 2 apuestas, es posible que no obtengamos ningún acierto. Para cada partido hacemos uno o dos pronósticos distintos y puede suceder el tercero.

Problema 4.
Solución.
Si x, y tienen signos opuestos, se tiene $|x-y|=|x|+|y|, |1-xy|=1-xy=1+|xy|$.
Así pues, la desigualdad es, realmente, una igualdad.
Si la desigualdad se cumple para un par de números (x, y), se cumple para el par opuesto ($-x$,$-y$). Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x, y \geq 0$.
Si la desigualdad se cumple para un par de números (x, y), se cumple para el par simétrico (y, x). Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \leq y \leq x$.
En este caso, $x-y \geq 0, 1-xy > 0, x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 0,$ y la desigualdad que debemos probar queda

$$(x-y)(1+xy) \leq (x+y)(1-xy).$$

Si expandimos los términos, esta desigualdad es la misma que

$$x-y+x^2y-xy^2 \leq x+y-x^2y-xy^2$$

Si simplificamos, obtenemos la desigualdad equivalente $2x^2y \leq 2y$
que, puesto que $x^2 \leq 1, y \geq 0$, es cierta.

Problema 5.
Solución.
Q es la derivada de P. Por tanto,

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c), Q(x)=(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)$$

Sea $d=\frac{a+b}{2}$, punto medio del segmento que une a con b. Se tiene que $a-d=d-b=\frac{a-b}{2}$.
El valor de Q en d es

$$Q(d)=\frac{b-a}{2}\frac{a-b}{2}+\frac{b-a}{2}(d-c)+\frac{a-b}{2}(d-c)=-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

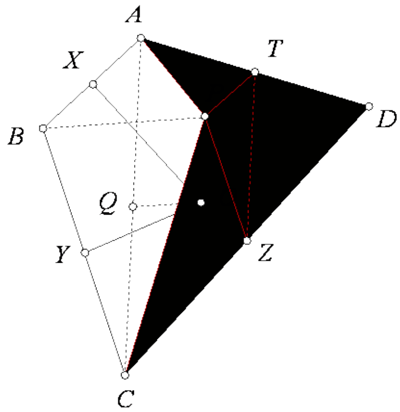
Sea $e=\frac{b+c}{2}$. Si cambiamos los papeles de a, b por los de b, c la igualdad anterior se transforma en

$$Q(e)=-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Por tanto d y e son raíces de Q si y sólo si $-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2=0$: o sea, si y sólo si $a = b = c$.
Ha de ser $P(x)=(x-a)^3, Q(x)=3(x-a)^2$ para un cierto parámetro a.

Problema 6.

Solución:
Bastará probar que el área de cada cuadrilátero es la cuarta parte del área total.
La quebrada *APC* divide al cuadrilátero en dos partes de igual área pues *AP* es la mediana de *ABD* y *PC* lo es de *CBD*.
La quebrada *TPZ* divide al cuadrilátero *APCD* (sombreado) en dos partes de igual área pues *PT* es mediana de *APD* y *PZ* es mediana de *CPD*.



Tenemos ya probado que el área del cuadrilátero *TPZD* es la cuarta parte del área del cuadrilátero inicial.
Finalmente *TZ* es paralela a *OP* por serlo ambas a *AC*; luego los triángulos *TPZ* y *TOZ* tienen la misma área y lo mismo les ocurre a los cuadriláteros *TPZD* y *TOZD*.
Del mismo modo se probaría para los otros tres cuadriláteros.

Problema 7

Solución: δ_n divide a a_{n+1} y a a_n , y por tanto a su diferencia $b_n = a_{n+1} - a_n = 3n^2 + 3n + 1$.
También divide a $c_n = 3a_n - nb_n = 3 - n - 3n^2$ y a la suma $d_n = b_n + c_n = 4 + 2n$. Pero entonces δ_n también divide a $e_n = 2b_n - 3nd_n = 2 - 6n$. Finalmente, divide a $3d_n + e_n = 14$.
Pero $b_n = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n+1) + 1$ es un número impar, luego δ_n solamente puede ser 1 o 7. El máximo es 7 ya que mcd (5^3 + 1, 6^3 + 1) = 7.

Problema 8.

Solución:
Usando la hipótesis *ab* = *cd* se escribe

$$a(a+b+c+d) = (a+c)(a+d)$$

de donde se obtiene que si *a* + *b* + *c* + *d* fuese primo debería dividir a *a* + *c* o *a* + *d* que son menores que él.