FRACCIONES CONTINUAS

Las fracciones continuas, tan presentes en la historia de las matemáticas, están en la actualidad prácticamente olvidadas, especialmente en las aulas de Secundaria. Si acaso aparecen es como mera “gimnasia algebraica”, aunque hasta hace poco aparecían en los programas de la antigua Formación Profesional

Las fracciones continuas son uno de los temas más interesantes dentro de la teoría de números, así como también uno de los más antiguos. Su origen se remonta a la antigua Grecia, específicamente Euclides estudió por primera vez este tipo particular de fracciones en el Libro 8 de los Elementos. Euclides vivió en el siglo 3 a.C. y enseñó matemáticas en Alejandría.

En la Edad Moderna la teoría fue retomada por el matemático italiano Bombelli, en su libro *L’Algebra parte maggiore dell’ aritmetica*. Bologna 1572, en donde se utilizan fracciones continuas para calcular raíces cuadradas.

Posteriormente Leonhard Euler en su memoria *De fractionibus continuis*. 1737, dio los primeros pasos en la teoría, tal como se conoce en la actualidad.

Finalmente, fue el célebre matemático francés Joseph Louis Lagrange quien en 1768 formalizó esta teoría en su memoria *Solution d’un problème d’arithmétique*. Lagrange resolvió completamente la famosa ecuación de Fermat $x^2 - dy^2 = 1$ para lo cual usó de manera esencial las fracciones continuas.

Una **fracción continua** es una expresión del tipo:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

donde a_0 es un número entero y los demás a_i son enteros positivos. Los numeradores son todos iguales a 1, y los coeficientes a_i, $1 \le i \le$ n son números naturales y a_0 es la parte entera de la fracción (mayor entero menor que la fracción). Esta forma (fracción de múltiples barras) es poco práctica, por eso se pensó en otra notación, menos complicada. La más aceptada es: $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$

Vemos un ejemplo con la fracción: $\frac{59}{11}$

$$\frac{59}{11} = 5 + \frac{4}{11} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{4}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

expresado en la notación anterior sería $\frac{59}{11} = [5; 2, 1, 3]$ (También, y esto es general, se podría expresar como [5; 2, 1, 2, 1] pues el último castillo también se puede poner en la forma $5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}$, pero se suele poner la primera expresión).

Si se permite que los numeradores o los denominadores parciales tomen valores arbitrarios, la expresión resultante es una **fracción continua generalizada**.

EJERCICIO 0: De las siguientes fracciones continuas, ¿cuál es la mayor? *Canguro Matemático del año 2011 (Nivel 4 pregunta 24)*:

A) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}$; B) $\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+2}}}$; C) $\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+3}}}$; D) $\dfrac{4}{4+\dfrac{4}{4+\dfrac{4}{4+4}}}$; E) $\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5+5}}}$

Vemos otro ejemplo con fracciones negativas

$$-\frac{81}{25}=-4+\frac{19}{25}=-4+\frac{1}{\frac{25}{19}}=-4+\frac{1}{1+\frac{6}{19}}=-4+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{19}{6}}}=-4+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{6}}}=[-4;1,3,6]$$

EJERCICIO 1: Expresar las siguientes fracciones como fracciones continuas:

a) $\dfrac{41}{13}$ b) $\dfrac{25}{37}$ c) $\dfrac{1}{7}$ d) $-\dfrac{81}{57}$

EJERCICIO 2: Determinar la fracción racional asociada a las fracciones continuas simples:

a) [2; 3, 2, 4] b) [−3; 2, 4, 5] c) [0; 3, 5, 8, 6]

EJERCICIO 3: La fracción continua correspondiente a $\dfrac{45}{16}$ es [2; 1, 4, 3]. ¿Qué fracciones corresponden a las siguientes fracciones continuas:

a) [2; 1, 4, 4] b) [2; 1, 4, 5] c) [2; 1, 4, 6] d) [2; 1, 4, 7]

e) Halla la fracción para la fracción continua [2; 1, 4]

f) ¿Puedes hallar la fórmula de la fracción para la fracción continua [2; 1, 4, *n*]?

EJERCICIO 4: Determinar las fracciones simples asociadas a las fracciones continuas simples: a) [1; 3, 5, 7]; [1; 3, 5]; [7; 5, 3, 1] b) [1; 1, 1, 2]; [1; 1, 1]; [2; 1, 1, 1]

El último ejercicio es un ejemplo de una propiedad general que dice lo siguiente: Si $\dfrac{A}{B}=[a_0;a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n]$ y $\dfrac{C}{D}=[a_0;a_1,a_2,...,a_{n-1}]$, entonces la fracción continua simple $[a_n;a_{n-1},a_{n-2},...,a_1,a_0]=\dfrac{A}{C}$

Es también posible de construir desarrollos en fracciones ubicando las barras de fracción sobre el numerador y no debajo, se obtiene así un **desarrollo en serie (expansión) de Engel** o **fracciones continúas espejo** o **fracciones continuas ascendentes**:

$$x=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot a_3}+\ldots+\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}+\ldots=\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\ldots}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

Estos enteros a_i se obtienen por el algoritmo siguiente, debido a Henry Briggs: el símbolo $[b]$ designa la parte entera por defecto (mayor entero menor que el número b):

$$\begin{cases} a_1=\left[\frac{1}{x}\right]+1 \\ x_1=a_1x-1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_2=\left[\frac{1}{x_1}\right]+1 \\ x_2=a_2x_1-1 \end{cases}, \qquad \ldots \begin{cases} a_{n+1}=\left[\frac{1}{x_n}\right]+1 \\ x_{n+1}=a_{n+1}x_n-1 \end{cases}$$

El número x *es* racional si y sólo si la sucesión $(a_n)\ n\geq 1$ es estacionaria (una sucesión es estacionaria si hay un término a_{n_0} a partir del cual todos los términos de la sucesión son iguales).

Ejemplo: Sea x = 1’175, entonces $a_1=\left[\frac{1}{1'175}\right]+1=1$ $x_1=a_1x-1=1'175\cdot 1-1=0'175$,

$a_2=\left[\frac{1}{0'175}\right]+1=6$, $x_2=a_2x_1-1=0'175\cdot 6-1=0'05$, $a_3=\left[\frac{1}{0'05}\right]+1=20$,

$x_3=a_3x_2-1=0'05\cdot 20-1=0$ y la sucesión acaba aquí.

Luego $1'175=\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{1\cdot 6\cdot 20}$. Y la fracción continua espejo de 1’175 es $\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{20}}{6}}{1}$

EJERCICIO 5: Hallar el desarrollo en fracciones continuas ascendentes de los números:

a) 2’34 b) 4’17

Las fracciones continuas finitas representan números racionales. Análogamente a las expresiones decimales periódicas también existen las **fracciones continuas periódicas** que corresponden a los números irracionales cuadráticos, (soluciones de ecuaciones del tipo ($Ax^2+Bx+C=0$; con A, B, C números enteros). En general la fracción continua simple que representa un número irracional es infinita. Veamos un ejemplo:

$$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1=1+\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}=\ldots$$

En este momento observamos que el valor obtenido es uno que ya ha aparecido y es en este momento en que los valores comienzan a repetirse. Este resultado lo expresaremos de la forma: $\sqrt{2}=\left[1;\overline{2}\right]$

EJERCICIO 6: Obtener una fracción continua que exprese los números irracionales

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{3}$

Y ahora el ejercicio inverso:

EJERCICIO 7: Obtener el número irracional cuya fracción continua es la siguiente:

a) $[2;\overline{1,2}]$ b) $[1;\overline{1}]$ c) $[2;\overline{1,2,1}]$ d) $[0;1,\overline{1,2}]$

EJERCICIO 8: Escribir las fracciones continuas simples correspondientes a (un número y a su inverso) a) $\frac{25}{13}$ y $\frac{13}{25}$; b) $\frac{4}{35}$ y $\frac{35}{4}$; c) $1+\sqrt{5}$ y $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$; d) $3-\sqrt{3}$ y $\frac{1}{3-\sqrt{3}}$

En la tabla siguiente se muestran las fracciones continuas correspondientes a los primeros 50 números irracionales cuadráticos:

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	$[1]$	26	$[5;\overline{10}]$
2	$[1;\overline{2}]$	27	$[5;\overline{5,10}]$
3	$[1;\overline{1,2}]$	28	$[5;\overline{3,2,3,10}]$
4	$[2]$	29	$[5;\overline{2,1,1,2,10}]$
5	$[2;\overline{4}]$	30	$[5;\overline{2,10}]$
6	$[2;\overline{2,4}]$	31	$[5;\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]$
7	$[2;\overline{1,1,1,4}]$	32	$[5;\overline{1,1,1,10}]$
8	$[2;\overline{1,4}]$	33	$[5;\overline{1,2,1,10}]$
9	$[3]$	34	$[5;\overline{1,4,1,10}]$
10	$[3;\overline{6}]$	35	$[5;\overline{1,10}]$
11	$[3;\overline{3,6}]$	36	$[6]$
12	$[3;\overline{2,6}]$	37	$[6;\overline{12}]$
13	$[3;\overline{1,1,1,1,6}]$	38	$[6;\overline{6,12}]$
14	$[3;\overline{1,2,1,6}]$	39	$[6;\overline{4,12}]$
15	$[3;\overline{1,6}]$	40	$[6;\overline{3,12}]$
16	$[4]$	41	$[6;\overline{2,2,12}]$
17	$[4;\overline{8}]$	42	$[6;\overline{2,12}]$
18	$[4;\overline{4,8}]$	43	$[6;\overline{1,1,3,1,5,1,3,1,1,12}]$
19	$[4;\overline{2,1,3,1,2,8}]$	44	$[6;\overline{1,1,1,2,1,1,1,12}]$
20	$[4;\overline{2,8}]$	45	$[6;\overline{1,2,2,2,12}]$
21	$[4;\overline{1,1,2,1,1,8}]$	46	$[6;\overline{1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,12}]$
22	$[4;\overline{1,2,4,1,2,8}]$	47	$[6;\overline{1,5,1,12}]$
23	$[4;\overline{1,3,1,8}]$	48	$[6;\overline{1,12}]$
24	$[4;\overline{1,8}]$	49	$[7]$
25	$[5]$	50	$[7;\overline{14}]$

Si nos fijamos, la última cifra del periodo siempre es el doble de la primera o parte entera; también, prescindiendo de la última cifra del periodo las demás del periodo forman un palíndromo o número capicúa. Además la longitud de los periodos de la tabla sigue la siguiente serie: 0,1,2,0,1,2,4,2,0,1,2,2,5,4,2,0,1,2,6,2,6,6,4,2,0... que parece indicar una cierta regularidad.

La fracción continua de un número irracional cuadrático puede encontrarse fácilmente de forma algebraica utilizando el método de Bombelli y Cataldi.
Por ejemplo:

$$\sqrt{2}=1+x \Rightarrow 2=(1+x)^2 \Rightarrow 2=1+2x+x^2 \Rightarrow 2-1=2x+x^2 \Rightarrow 1=x\cdot(2+x) \Rightarrow x=\frac{1}{2+x}$$

Repasaremos a continuación un algoritmo conocido, el **algoritmo de Euclides**, que recordamos; es un procedimiento por el cual se obtiene el máximo común divisor de dos números enteros. Se basa en el hecho de que el m.c.d.(a, b) = m.c.d.(b, r) donde r es el resto de la división entre a y b.
Por ejemplo si queremos calcular el m.c.d. (972, 421) mediante el algoritmo de Euclides los cálculos se disponen de la siguiente manera

	2	3	4	5	6	cocientes
a = 972	b = 421	130	31	6	1	
130	31	6	1	0		restos

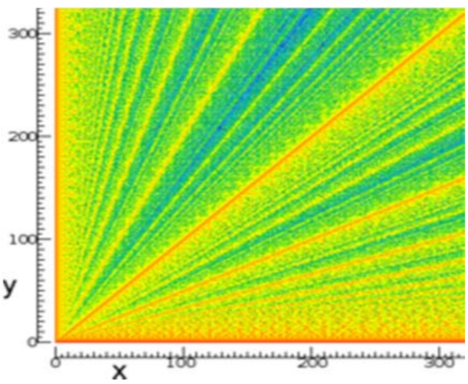
El último divisor cuando el resto da 0 es el m.c.d. En nuestro caso m.c.d.(972, 421) = 1, pero lo realmente interesante es que viendo la fracción continua simple correspondiente a la fracción $\frac{972}{421}$ coincide con los cocientes parciales de las divisiones sucesivas del algoritmo de Euclides. Y esto es así ya que:
972 = 2·421 + 130; 421 = 3·130 +31; 130 = 4·31 + 6; 31 = 5·6 + 1; 6 = 1·6 + 0
Y por lo tanto se tiene entonces que:

$$\frac{972}{421} = 2 + \frac{130}{421} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{421}{130}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{31}{130}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{130}{31}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{6}{31}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{31}{6}}}} =$$

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}} = [2;3,4,5,6]$$

EJERCICIO 9: Calcula las fracciones continuas simples utilizando el algoritmo de Euclides de las siguientes fracciones:
a) $\frac{253}{179}$ b) $\frac{832}{159}$ c) $\frac{729}{2318}$ d) $\frac{1189}{3927}$

Complejidad del algoritmo de Euclides



Gráfica del número de divisiones efectuadas en el algoritmo de Euclides. El rojo indica pocas operaciones, mientras que los colores eventualmente más azules representan mayor número de operaciones.

El caso más complejo para este algoritmo es cuando se le pide calcular el máximo común divisor de dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, si se desea calcular el máximo común divisor de $f_{10} = 55$ y $f_{11} = 89$ se obtiene la siguiente secuencia de operaciones:

	1	1	1	1	1	1	1	1	2
89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1	0	

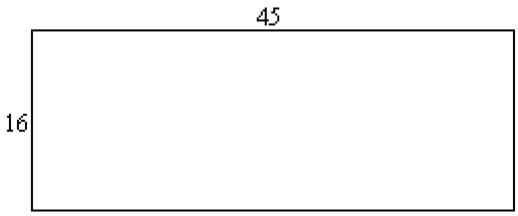
En este ejemplo se observa que con estos dos números de dos dígitos decimales, se necesita hacer 9 divisiones. En general, el número de divisiones efectuadas por el algoritmo nunca supera 5 veces el número de dígitos que tienen estos números.

En realidad el algoritmo de Euclides funciona no sólo para los números naturales, sino para cualesquiera elementos donde exista una "división con resto". A este tipo de divisiones se les llama **divisiones euclidianas** y a los conjuntos donde se puede definir dicha división se les llama **dominios euclídeos**. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros y el de los polinomios con coeficientes racionales son dominios euclídeos porque podemos definir una división con resto. De esta manera, se puede calcular el máximo común divisor de dos números enteros o de dos polinomios. Por ejemplo, para calcular el m.c.d. de los polinomios $P(x) = x^5 + 2x^3 + x$ y $Q(x) = x^4 - 1$ el algoritmo de Euclides sugiere la siguiente secuencia de operaciones:

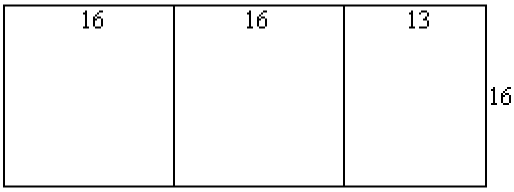
	x	$(1/2)x$	$-2x$
$x^5 + 2x^3 + x$	$x^4 - 1$	$2x^3 + 2x$	$-x^2 - 1$
$2x^3 + 2x$	$-x^2 - 1$	0	

De esta manera se concluye que su máximo común divisor es $-x^2 - 1$.

Otra aplicación de las fracciones continuas es el **recubrimiento de rectángulos por cuadrados**. Así por ejemplo consideremos el rectángulo de dimensiones 45 x 16 unidades

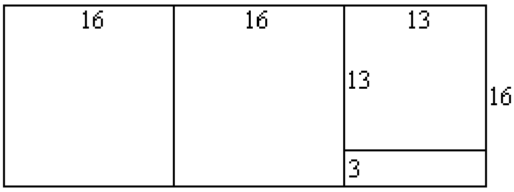


Vamos a cubrirlo con el menor número posible de cuadrados. Como paso inicial efectuamos la división entre 45 y 16, obtenemos de cociente 2 y resto 13, esto se puede expresar así: $\frac{45}{16} = \frac{16+16+13}{16} = 2 + \frac{13}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{13}}$, geométricamente esto significa que el rectángulo se puede descomponer en:



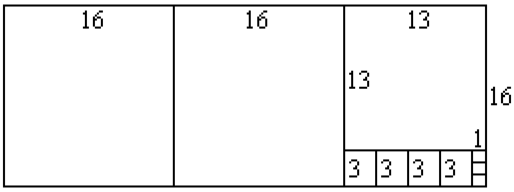
Hacemos ahora lo mismo con el rectángulo (más pequeño que el inicial) de dimensiones 16 x 13

Como quiera que $\frac{45}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{13}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{13}}$, geométricamente se corresponde con:



Siguiendo con el proceso vamos obteniendo

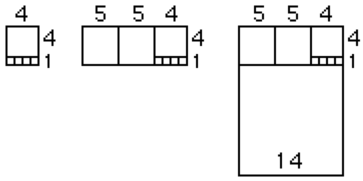
$\frac{45}{16} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{13}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{3}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}$, que geométricamente significa:



Hemos dividido el rectángulo de 45x16 en dos cuadrados de 16x16; otro más de dimensiones 13x13; cuatro de 3x3 y tres de 1x1. El proceso se acaba cuando hemos llegado a cuadrados de dimensiones 1x1. En realidad el lado de los cuadrados más pequeños coincide con el máximo común divisor de los números que representan las dimensiones del rectángulo inicial.

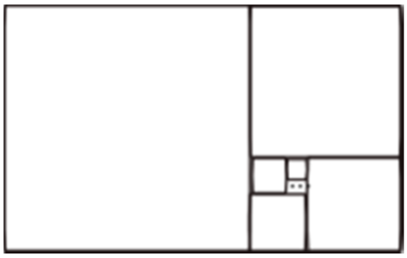
La fracción $\frac{45}{16} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}} = [2; 1, 4, 3]$ expresada en forma continua, da el número de los cuadrados utilizados en la descomposición del rectángulo de dimensiones 45x16.

EJERCICIO 10: Los tres rectángulos de la figura están recubiertos por cuadrados. Suponiendo que la longitud del lado de la baldosa cuadrada más pequeña del primer rectángulo es 1. Expresar la razón de las longitudes de lo lados de los tres rectángulos como fracciones continuas.

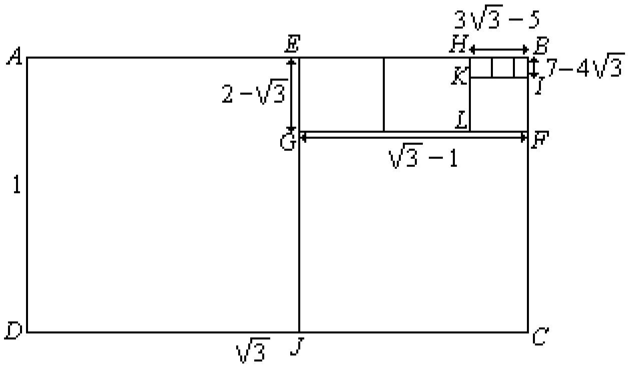


EJERCICIO 11: Descomponer en el menor número de cuadrados un rectángulo de dimensiones:
a) 9x7 b) 30x16 (semejante al 15x8) c) 33x13 d) 42x9 (semejante al 14x3)

La técnica del recubrimiento del rectángulo con cuadrados conduce a una fracción continua infinita si la longitud y la anchura del rectángulo son inconmensurables (dos segmentos (números) *AB* y *CD* son **conmensurables** cuando existe un tercer segmento *PQ* el cual cabe exactamente un número entero de veces en los dos primeros, es decir, *PQ* «mide» (mensura: medida) a los segmentos *AB* y *CD*).
.

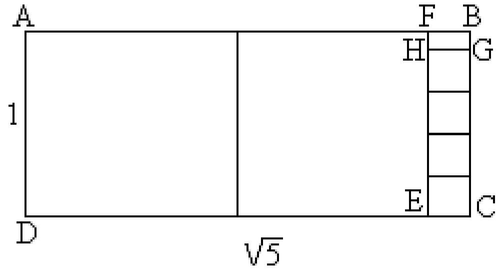


Vamos ahora a intentar aplicar el procedimiento geométrico de recubrimientos con cuadrados a un rectángulo de dimensiones $\sqrt{3}$ x 1



Después de varias iteraciones nos damos cuenta de que hay una regularidad en la sucesión del número de cuadrados del mismo tamaño que se van dibujando y que parece ser que el proceso no va a terminar nunca. La figura sugiere que el rectángulo *EBFG* es semejante al *HBIK*. Todos los cuadrados son semejantes, por tanto el rectángulo de la parte superior derecha también será semejante al *EBFG* y a *HBIK*, y el proceso sigue indefinidamente. De esta forma, el número de cuadrados necesarios es infinito y el lado de los mismos tiende a cero.

EJERCICIO 12: Demuestra que los rectángulos FBEC y FBGH, del desarrollo del rectángulo de dimensiones $\sqrt{5}$ x 1, son semejantes



En realidad todo número real puede representarse como fracción continua. Para calcular la representación en fracción continua de un número r, se escribe en primer lugar la parte entera de r. Se resta esta parte entera a r. Si la diferencia es 0 se para; en otro caso se halla el inverso de la diferencia y se repite. La determinación de la fracción continua de un número real usando directamente este algoritmo (por ejemplo con una calculadora) tiene un problema bastante evidente: en la mayoría de los casos hay que tomar aproximaciones, por lo que se ve rápidamente complicada por la acumulación de errores, y por eso se emplea otra técnica:

En general si $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ escribimos $[a_0; a_1, ..., a_n]$ como número racional reducido $\frac{p_n}{q_n} = x_n$. Estos números se llaman los **convergentes n-ésimos** de x. Estos satisfacen las ecuaciones de recurrencia siguientes:
$p_0 = a_0$, $q_0 = 1$; $p_1 = a_0 \cdot a_1 + 1$, $q_1 = a_1$, $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$; $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ $(n \geq 2)$.
Verificando además la propiedad de que $p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^{n-1}$ que utilizaremos para resolver ecuaciones diofánticas. Es interesante ver la forma con la que los convergentes van aproximándose a x, que es, alternativamente, por defecto y por exceso, es decir:

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < ... \leq x \leq .... < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2} \text{ ó } x_1 < x_3 < ... \leq x \leq ... < x_4 < x_2$$

Aunque en el resto del artículo no se va a utilizar esto, y es muy posible que no los conozcáis, es curioso resaltar, que p_n , q_n se pueden expresar como un determinante:

$$p_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a_n \end{vmatrix}, \quad q_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 13: Utilizando la regla de formación de los convergentes calcular los diez primeros convergente del número $x = [2; \overline{1, 2}]$ y compáralos con x y entre sí.

La representación de un número real en fracción continua tiene varias propiedades que hacen que dicha representación sea más interesante que la representación decimal habitual:

- La representación en fracción continua de un número es finita si y solo si ese número es racional.

- La representación en fracción continua de un racional *simple* es generalmente corta.
- La representación en fracción continua de un racional es única siempre que no acabe en 1 (de hecho: $[a_0; a_1, ... a_n, 1] = [a_0; a_1, ... a_n + 1]$).
- Los términos de una fracción continua se repetirán si y solo si representa a un irracional cuadrático, es decir, si es solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.

Y la más interesante para nosotros

- El truncamiento de la representación en fracción continua de un número x da una aproximación racional que es, en cierto sentido, la *mejor posible*. Si truncamos una representación decimal, obtenemos una aproximación racional, pero habitualmente no la mejor.

  Por ejemplo, truncando $\frac{1}{7}$= 0’142857142… a las décimas, centésimas y milésimas obtenemos las siguientes aproximaciones: $\frac{1}{10}, \frac{14}{100}, \frac{142}{1000}$. Pero, evidentemente, el mejor nº racional que aproxima a $\frac{1}{7}$ es el propio $\frac{1}{7}$, ($\frac{1}{7} = [0; 7]$).

Ahora haremos lo mismo con el número π. A tal fin tomamos el siguiente valor de este número, el cual es correcto hasta la octava cifra decimal π ≅ 3’14159265. Podemos hallar algunas aproximaciones de π mediante fracciones continuas. Se tiene:

$a_0 = [\pi] = 3;\ r_1 = \dfrac{1}{\pi - 3} = 7'06251,$

$a_1 = [r_1] = 7;\ r_2 = \dfrac{1}{r_1 - a_1} = 15'99660,$

$a_2 = [r_2] = 15;\ r_3 = \dfrac{1}{r_2 - a_2} = 1'00341,$

$a_3 = [r_3] = 1;\ r_4 = \dfrac{1}{r_3 - a_3} = 293'09689,$

$a_4 = [r_4] = 293;\ r_5 = \dfrac{1}{r_4 - a_4} = 10'32056,$

$a_5 = [r_5] = 10$

Empleamos ahora el algoritmo de los convergentes, los cinco primeros son:

n	a_{n+1}	p_n	q_n	x_n
0	7	3	1	3
1	15	22	7	3’14285714
2	1	333	106	3’14150943
3	292	355	113	3’14159292
4	10	103993	33102	3’14159265

Si truncamos la representación decimal de π a las décimas, centésimas, milésimas obtendremos aproximaciones como $\frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{31415}{10000}$. Por otra parte la representación en fracción continua de π comienza con [3; 7, 15, 1, 292, 10, ...]. Si truncamos esta representación, obtendremos las excelentes aproximaciones:

3,

[3; 7] = $\frac{22}{7}$ = 3’14285714..,

[3; 7, 15] = $\frac{333}{106}$ = 3’141509434…,

[3; 7, 15; 1] = $\frac{355}{113}$ = 3’1415929203539..,

[3; 7, 15, 1, 292] = $\frac{103993}{33102}$ = 3`1415926530119026… ,

los denominadores de ambos truncamientos $\frac{314}{100}$ y $\frac{333}{106}$ son casi iguales, pero el error en la aproximación de $\frac{314}{100}$ es nueve veces mayor que el de $\frac{333}{106}$, así como la aproximación a π con [3; 7, 15, 1] es 100 veces más precisa que 3’1416. El valor aproximado de π dado por la quinta convergente es bastante bueno, dado que se aproxima al valor correcto en ocho cifras decimales.

Con un poco más de precisión el número π con 150 decimales es:
3’141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816
406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408 13

Su fracción continua es infinita, sus primeras a_i son:

[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1]

y sus primeros convergentes son:

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \frac{833719}{265381}, \frac{1146408}{364913}$$

La última aplicación elemental que veremos de las fracciones continuas y sus convergentes es la resolución de las **ecuaciones diofánticas.** Son poco precisos los datos que se conocen actualmente sobre la vida de Diofanto. Según las investigaciones más fiables, que proceden de la Antología griega, escrita por Metrodoro de Bizancio en el siglo V d. C., Diofanto debió vivir en el siglo III a.C., durante aproximadamente unos 84 años, ya que en una antología griega de problemas algebraicos en forma de epigramas, se recoge el siguiente epitafio, al parecer grabado en su tumba:

“¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba. A partir de ahí, la séptima parte de existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito. Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo. Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.”

En honor a él las ecuaciones con coeficientes enteros cuyas soluciones son también enteras se denominan ecuaciones diofánticas. Las más sencillas son las ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma $Ax \pm Bx = C$. Una aplicación importante de las fracciones continuas y sus convergentes es la de resolver ecuaciones diofánticas lineales del tipo $Ax + By = C$.

La ecuación diofántica $Ax + By = C$, solo tiene solución si m.c.d.(A, B) = d divide a C (quiere esto decir que A, B y C se pueden simplificar hasta conseguir que los coeficientes de la ecuación tengan por m.c.d. 1). Si una ecuación diofántica tiene solución (x_1, y_1), necesariamente tiene infinitas soluciones y todas son de la forma:

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot \dfrac{B}{d} \\ y = y_1 - t \cdot \dfrac{A}{d} \end{cases} \text{ donde } t \in Z$$

Sea, por ejemplo, la ecuación diofántica lineal: $525x + 100y = 50$; la podemos simplificar por 25, quedando entonces: $21x + 4y = 2$, con m.c.d.(21, 4) = 1, despejando y se tiene $y = \dfrac{2 - 21x}{4}$ de la que teniendo en cuenta que tanto x, como y deben ser enteros, podemos obtener una solución tanteando (dando valores a la x para los que y sale entero) $x_1 = 2$, $y_1 = -10$

Veamos el otro procedimiento, usando fracciones continuas, con otra ecuación más complicada: $244x + 108y = 112$, simplificando por 4 obtenemos la ecuación: $61x + 27y = 28$, con m.c.d.(61, 27) = 1, Buscamos las convergentes de la fracción $\dfrac{61}{27}$ = [2; 3, 1, 6] que son: $2; \dfrac{7}{3}, \dfrac{9}{4}$ y $\dfrac{61}{27}$ elegimos el último $\dfrac{9}{4}$. Se cumple, según la propiedad anteriormente citada de los convergentes que $61 \cdot 4 - 27 \cdot 9 = 1$, luego 4, − 9 serán una solución particular de $61x + 27y = 1$, bastará multiplicar por el término independiente 28 para obtener una solución: $x_1 = 4 \cdot 28 = 112$ e $y_1 = -9 \cdot 28 = -252$.
Las demás soluciones se obtienen mediante las paramétricas:

$$\begin{cases} x = 112 - 27t \\ y = -252 + 61t \end{cases}$$

Si se desean soluciones positivas deberemos ajustar convenientemente el parámetro t.

EJERCICIO 14: Un señor va a comprar un libro que cuesta 23 €. No obstante, cuando va a pagar se da cuenta que sólo tiene monedas de 2 €. Por si fuera poco, el cajero en aquel momento sólo tiene billetes de 5 €. ¿Es posible que pueda pagar el precio exacto del libro?

EJERCICIO 15: Un hombre cobra un cheque por d dólares y c centavos en un banco. El cajero, por error, le da c dólares y d centavos. El hombre no se da cuenta hasta que gasta 23 centavos y además observa que en ese momento tiene $2d$ dólares y $2c$ centavos. ¿Cuál era el valor del cheque?

EJERCICIO 16: Hemos comprado libros de una oferta por 68 € el volumen y en otra oferta libros a 76 € el volumen, pagando en total 1176 €. Deseamos saber cuántos libros se han comprado de cada oferta.

Un problema clásico de sistema con ecuaciones diofánticas es el siguiente:
EJERCICIO 17: Cinco hombres y un mono naufragan en una isla desierta. Los hombres pasan todo el primer día recogiendo cocos. Por la noche, uno de ellos despierta y, desconfiado, decide separar su parte. Divide los cocos en cinco montones, toma su parte y, como sobra un coco, se lo da al mono. Poco después, un segundo náufrago se

despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones, vuelve a sobrar un coco y también se lo da al mono. Uno tras otro, el tercero, cuarto y quinto náufragos hacen lo mismo. Al día siguiente por la mañana, dividen los cocos en cinco montones sin que sobre ninguno. ¿Cuántos se habían recolectado inicialmente?

Históricamente se ha aplicado esta importante propiedad con unos magníficos resultados. Veamos cuatro de ellos:

Reforma del Calendario Gregoriano

Iniciemos este repaso recordando que la medición del paso del tiempo se ha asociado con tres ciclos astronómicos. El día, como el tiempo que corresponde a una rotación de la Tierra sobre su eje; el mes como el tiempo que tarda la Luna en girar alrededor de la Tierra, visto desde la Tierra, es el tiempo entre una Luna Nueva y la siguiente. Como tercer ciclo de referencia, el año, el tiempo que corresponde a una revolución de la Tierra alrededor del Sol.

Los egipcios, crearon un calendario que consistía en un año solar de 365 días y formado por doce meses de 30 días cada uno. Al final del año, agregaban cinco días “intercalarios".

Los persas conocían muy bien, mejor que cualquier otro pueblo antiguo, la duración del año solar. Tenían siete grupos de cuatro años de los cuales tres tenían 365 y uno tenía 366. Después de estas siete cuarternas seguía un grupo de cinco años, cuatro de ellos de 365 días y uno de 366. En esta forma, en 33 años, la duración media del año era de 365*;* 24 días y el error era de un día cada 15459 años.

Moisés después del Éxodo de Egipto, conocedor de la astronomía egipcia, instituyó el calendario solar, que era bastante preciso. Sin embargo, con el paso de los años y después del sometimiento por los babilonios, sustituyeron su calendario por el de los Caldeos, que era un calendario lunar de doce meses que alternaban 29 y 30 días, este calendario era menos preciso que el anterior. Cuando al término del año, la cosecha de cebada no estaba lista para ofrecerla al templo, agregaban un mes número 13 que lo llamaban “de mala suerte". Para sus celebraciones religiosas actualmente utilizan un calendario que data del siglo IV. Es un calendario lunar de meses de 29 y 30 días y el día comienza con el ocaso del sol. Cada 19 años, 12 de ellos son comunes y 7 son los de mala suerte. Los comunes, tienen 353, 354 ó 355 días, llamados año deficiente, año completo y año abundante respectivamente. Los siete años restantes del grupo de 19 pueden tener 383, 384 ó 385 días. La secuencia de años comunes y maldecidos es de dos y uno.

Se atribuye a Rómulo la creación del año de 10 meses, luego Numa Pompilio lo llevó a 12 meses. Julio César, como pontífice máximo y gobernador de Roma, a la conquista de Egipto, trajo a Sosígenes, astrónomo de Alejandría y le encomendó perfeccionar el calendario. En la conformación de este nuevo calendario se consideró la duración del año en 365’25 días. Dado que, cada cuatro años se completaba un día con las fracciones, se decidió el año de 366 días que se llamó *bisiesto*.
Los 365 días se distribuyen en meses sin tomar en cuenta el mes lunar. Se asignó 31 y 30 días a los meses en forma alternada. Como no alcanzaban los días para tener seis meses de 31 días, se quitó del último mes, febrero, un día, dejándolo con una duración de 29 días, excepto para los años bisiestos que tendría 30. Este calendario, conocido como calendario *Juliano*, entró a regir el año 46 a.C.:

I. *Martius* 31 Marte
II. *Aprilis* 30 Apolo
III. *Maius* 31 Júpiter-Maius

IV. *Junius* 30 Juno
V. *Quintilis* 31 luego Julio
VI. *Sextilis* 30 luego Agosto
VII. *September* 31
VIII. *October* 30
IX. *November* 31
X. *December* 30
XI. *Januarius* 31 Jano
XII. *Februarius* 29-30 Febro

Posteriormente, César decretó que el año comenzaría en el mes de enero y *Quintilis*, el mes de su nacimiento, se llamaría ahora Julio. Más tarde, Augusto César, decretó que el mes *Sexto* que seguía a Julio se llamaría Agosto y tendría, al igual que Julio, 31 días, día que quitó del mes de febrero.

Esto último explica por qué septiembre no es el séptimo mes como sugiere su nombre, al igual que no ocurre con octubre, noviembre y diciembre, cuyo nombre sugiere que son el octavo, noveno y décimo mes respectivamente.

El año de la reforma se tuvo que alargar hasta 445 días, para que la primavera se iniciara el 25 de marzo como en los tiempos de Numa. Con el paso de los años, se logró una mayor precisión en el cálculo de duración del año y consecuentemente los defectos del calendario Juliano se hicieron evidentes.

En 1582 el Papa Gregorio XIII, designó al astrónomo italiano Cristóbal Clavio, para trabajar sobre la reforma del calendario, específicamente en lo referente a los años bisiestos, ya que, la duración del año no es exactamente 365'25 días, sino más bien 365 días 5 horas 49 minutos y 16 segundos, según las tablas astronómicas elaboradas por la Academia de Toledo en el siglo XIII, por orden expresa de Alfonso X *el Sabio* (1221-1284), rey de Castilla y de León. Acorde con las recomendaciones de Clavio, el Papa Gregorio XIII decretó que: Sería bisiesto aquel año cuya cifra sea divisible por 4, excepto los años seculares, múltiplos de 100, los cuales serían bisiestos únicamente si son divisibles por 400.

Dado que desde la vigencia del calendario Juliano se habían considerado como bisiestos, años que no debieron serlo y había ya un error acumulado de 10 días, se quitarían 10 días al calendario: el día siguiente al 4 de octubre de 1582 (la Fiesta de San Francisco de Asís) sería el 15 de octubre (este año de 1582 es el año más corto de la cristiandad, con 355 días).

De acuerdo con estudios astronómicos más precisos, el calendario se adelanta un poco al Sol; cada año gana 26 segundos, lo cual equivale a un día cada 3323 años. Así se habría perdido un día cuando se llegase al año 4000. Por esta pequeña diferencia se ha establecido una regla adicional, que los años múltiplos de 4000 no son bisiestos. Finalmente, estas reglas que se mencionaron, definen al que se conoce como calendario *Gregoriano*, aunque, algunos sectores de la iglesia Ortodoxa se rigen para sus celebraciones religiosas por el calendario Juliano.

La comunidad china y la judía, utilizan su propio calendario para sus celebraciones religiosas. El calendario chino es el registro cronológico continuo más antiguo, sus inicios se asocian con el emperador Huang Ti, 2600 a.C., cuando introdujo el ciclo del zodíaco y los doce años, cada cual regido por un animal distinto, como son: rata, buey, tigre, liebre, dragón, culebra, caballo, oveja, mono, gallo, perro y cerdo. La fecha de inicio del año se hace coincidir con la segunda luna nueva a partir del solsticio de invierno (21 de diciembre en el hemisferio norte).

El calendario judío, que procede del antiguo calendario hebreo, ha permanecido inalterable desde el año 900 aproximadamente. Es el calendario oficial del moderno estado de Israel y es utilizado por los judíos en todo el mundo como un calendario religioso. El punto de partida de la cronología hebrea es el año 3761 a.C., la fecha de la creación del mundo según se describe en el Antiguo Testamento. El calendario judío es lunisolar, basado en meses lunares alternos de 29 y 30 días. Se intercala un mes extra cada tres años, de acuerdo con un ciclo de 19 años.

Para los musulmanes, el inicio de su calendario Islámico es el día posterior a la *Hégira*, o salida de Mahoma de La Meca a Medina y corresponde al 622 d.C. de nuestro calendario. Para los mahometanos el día inicia con el ocaso del sol y su calendario es lunar. Posteriormente, el astrónomo, matemático y poeta árabe Omar Khayyam (1040-1125), quien fue director del Observatorio de Merv, actual Merí en Turkmenistán, emprendió y realizó en 1074 la reforma del calendario musulmán, al sugerir un ciclo de 33 años que incluye 8 años de 366 días.

El pueblo Maya tenía amplios conocimientos de astronomía y utilizó varios calendarios que se remonta probablemente al siglo I a.C. Un calendario ritual o *tzolkin*, religioso de 260 das, tiempo que le toma al planeta Venus darle una vuelta al Sol; un calendario Solar o *haab* de 365 días, un calendario de *Cuenta Larga* de los días transcurridos desde el inicio de la cronología Maya y un calendario vigesimal de 400 días. En el de cuenta larga, el inicio, luego de una gran inundación, corresponde al 11 de agosto del año 3114 a.C. de nuestro calendario, además, según ellos el fin de la era actual sería el día 21 de diciembre del año 2012. El calendario maya, aunque muy complejo, era el más exacto de los conocidos hasta la aparición del calendario gregoriano en el siglo XVI. La unidad más simple era el día o *kin*; un total de 20 kines componían un *uinal*; 18 uinales, un *tun* (360 días); 20 tunes, un *katíun* (7200 días) y así sucesivamente. Un ciclo de 52 años solares o de 73 rituales sumaban 18980 días y se denominaba rueda calendárica".

Además de estos, a través del tiempo, se han intentado y utilizado otros calendarios, por ejemplo, el calendario de la primera República Francesa dividía el año en 12 meses de 30 días, el día en 10 horas de 100 minutos y cada minuto tenía 100 segundos, todo acorde con el sistema decimal (base 10), las semanas tenían 10 días con solo uno de descanso, por esto, no podía tener apoyo popular y solo rigió en Francia desde el 22 de julio de 1792 hasta el primero de enero de 1806. Se asignaron tres meses a cada estación; los meses de otoño se llamaron *Vendimiario* o mes de la vendimia, *Brumario* o mes de la niebla y *Frimario* o mes del hielo; los meses de invierno, *Nivoso* o mes de la nieve, *Pluvioso* o mes de la lluvia y *Ventoso* o mes del viento; los meses de primavera, *Germinal* o mes de las semillas, *Floreal* o mes de las flores y *Pradial* o mes de los prados, y los meses de verano, *Mesidor* o mes de la cosecha, *Termidor* o mes del calor y *Fructidor* o mes de los frutos. Como datos interesantes, la instauración del metro como unidad de medida se proclama en Francia por la Ley del 19 de Frimario del año VIII, que equivale al 10 de diciembre de 1799. El 9 de Termidor del 10 año III, Robespierre y sus partidarios fueron detenidos y ese mismo día guillotinados.

Existen muchos otros calendarios, es decir, muchos pueblos o religiones llevan su propia manera de medir el paso del tiempo y la cuenta inicia con algún hecho o acontecimiento importante para ellos, como en el caso del Maya o el Musulmán.

El calendario Etíope, por ejemplo, considera el tiempo transcurrido, según sus cálculos, desde el nacimiento de Jesús, en éste existe una diferencia de aproximadamente 8 años con respecto del Gregoriano. Los años están compuestos de 12 meses lunares de 30 días y un mes a intercalar de 5 días que se añade a septiembre tras el paso de las lluvias.

Hoy sabemos que la duración del año es de 365 días, 48 minutos y 46’15 segundos. Si transformamos la duración del año en días, esta sería $365 + \dfrac{10463}{43200}$ días, observamos que

$$\frac{10463}{43200} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{64+\ldots}}}}}}, \text{ es decir } \frac{10463}{43200} = [4; 7, 1, 3, 5, 64, \ldots]$$

y sus convergentes son: $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{4+\dfrac{1}{7}} = \dfrac{7}{29}$, $x_3 = \dfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}} = \dfrac{8}{33}$, $x_4 =$

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}} = \frac{31}{128}$$

Notemos que con el calendario Gregoriano se intercalan 97 años bisiestos cada 400 años, lo cual viene a ser casi igual a 31 años bisiestos cada 128 años que es la distribución que según la tabla anterior, presenta el menor error. De la proporción $\dfrac{31}{128} = \dfrac{x}{400}$ resulta $x = 96’875$ que es una buena aproximación de los 97 años bisiestos del calendario Gregoriano.

Es importante aclarar que estas modificaciones se adoptaron gradualmente por los distintos países:

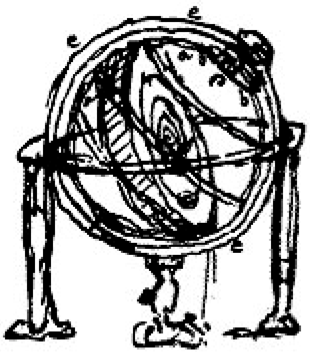
Año	Países
1582	Italia, España, Portugal Francia.
1583	Alemania católica
1584	Bohemia, Moravia, Suiza católica
1586	Polonia
1587	Hungría
1606	Siria
1700	Dinamarca, Países Bajos
1701	Suiza y Alemania protestantes
1752	Inglaterra, EUA (colonias inglesas)
1753	Suecia
1873	Japón
1914	Turquía
1922	Grecia
1923	Rusia

Así, como vemos, no se adoptó en Rusia hasta 1923, por lo que la Revolución Bolchevique de 1917, llamada la gran *revolución de octubre*, ocurrió en el mes de noviembre del nuevo calendario y en este mes se celebra en la actualidad.

Por último, y siempre relacionado con el asunto de corregir las deficiencias que pudiera generar la forma de medir el tiempo, es sabido que las mareas son el producto de la fuerza de gravitacional que ejerce la Luna sobre la Tierra, y este efecto es mayor sobre la parte de la Tierra que se encuentra en frente que en el lado opuesto. El resultado de este efecto es un pequeño alargamiento de la Tierra en dirección de la Luna, que tiene mayor efecto sobre la masa líquida que sobre la parte sólida, esto produce las *mareas* y este se sucede dos veces al día. Las masas de agua producen fricción con las partes bajas del mar, y esta fricción transforma la energía en calor, es decir, la Tierra está perdiendo energía rotacional. La pérdida del índice de rotación no es fácil de notar, sin embargo, para los astrónomos esto hace que una estrella que se observó en una posición en un tiempo determinado, se observe hoy con un corrimiento significativo, lo mismo ocurriría con los eclipses. Cuando la rotación de la Tierra está atrasada en 0'9 segundos se agrega un *segundo bisiesto* para lograr que el planeta esté sincronizado de nuevo, lo cual es útil y necesario para la navegación, para las telecomunicaciones y como se ha mencionado, para la astronomía. En 1972 se creó el sistema de resincronización del planeta, en ese momento se agregaron 10 segundos para lograr el ajuste, esto responde a la pregunta de cuál ha sido el año más largo; la respuesta es 1972 que además de ser bisiesto, se le agregaron 10 segundos. Desde el año 1972 han existido 25 minutos de 61 segundos. El 30 de Junio del año 2012 se agregó el último. Pero introducir este segundo bisiesto desbarata el protocolo NTP de internet y, sobre todo, afecta a los sistemas de navegación de satélites, como el GPS y el GNSS (Sistema de Navegación Global de Satélites. Sitios como Reddit, Gawker, Linkedln, Foursquare y Yelp, pero sobre todo Amadeus y su sistema mundial de vuelos tuvieron problemas durante unos minutos tras añadirse este último segundo bisiesto al reloj universal con el fin de seguir el ritmo de rotación de la Tierra. La peor parte se la llevaron en Australia y las líneas aéreas. Hasta 50 vuelos de la compañía australiana Qantas se retrasaron por un fallo del sistema mundial de reservas con el software de Amadeus, sistema mundial que supervisa el control de las reservas de vuelos. También Virgin Australia y Cathay Pacific tuvieron los mismos problemas en la facturación durante una hora.

Engranajes y Autómata Planetario de Huygens

Si deseamos que unos engranajes produzcan 2009 revoluciones en un eje y 2000 en otro, sus números de dientes deben seguir la proporción $\frac{2009}{2000}$, pero se pueden sustituir por $\frac{223}{222}$ con un error inferior a 0,000005 ($\frac{2009}{2000}$ = [1; 222, 4, 2]; la aproximación [1; 222] = $\frac{223}{222}$)



Christiaan Huygens (1629-1695), Matemático, astrónomo y físico holandés. Hijo del poeta renacentista Constantin Huygens, pronto demostró un gran talento para la mecánica y las matemáticas. Estudió en la Universidad de Leiden y en el Colegio de Breda. Huygens adquirió una pronta reputación en círculos europeos por sus publicaciones de matemáticas y por sus observaciones astronómicas, que pudo realizar gracias a los adelantos que introdujo en la construcción de telescopios. Destacan, sobre todo, el descubrimiento del mayor satélite de Saturno, Titán (1650), y la correcta descripción de los anillos de Saturno, que llevó a cabo en 1659. Más tarde se trasladó a París, donde permaneció desde 1666 a 1681, fecha de su regreso a La Haya. En 1666 fue miembro fundador de la Academia Francesa de Ciencias. En 1673 se publicó su famoso estudio sobre *El reloj de péndulo*, brillante análisis matemático de la dinámica pendular en el que se incluyeron las soluciones completas a problemas como el período de oscilación de un péndulo simple y las leyes de la fuerza centrífuga para un movimiento circular uniforme. Contemporáneo de Isaac Newton, su actitud mecanicista le impidió aceptar la idea de fuerzas que actúan a distancia. El mayor logro de Huygens fue el desarrollo de la teoría ondulatoria de la luz, descrita ampliamente en el *Traité de la lumière* (1690), y que permitía explicar los fenómenos de la reflexión y refracción de la luz mejor que la teoría corpuscular de Newton.

Huygens descubrió que las fracciones continuas son la herramienta ideal para determinar el número de dientes que deben tener las ruedas de engranajes de un reloj. Las utilizó para la construcción de un autómata planetario que utilizó para determinar las posiciones relativas de los cuerpos celestes del sistema solar, con la ayuda de un mecanismo de relojería; un autómata que representaba el movimiento de los planetas en torno al sol. La dificultad a la que se enfrentó, estaba ligada a la duración de un año terrestre y uno de Saturno. En un año, la Tierra gira de 359° 45' 40'' 31''' y Saturno de 12° 13' 34'' 18'''. El cociente es igual a $\frac{77708431}{2640858}$. ¿Cuántos dientes hacen falta en ambos engranajes para reproducir respectivamente los movimientos de la Tierra y Saturno?

Un cálculo con fracciones continuas del reloj sería:

$$\frac{77708431}{2640858} = [29; 2, 2, 1, 5, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 10, 2, 2, 3]$$

Se obtiene la sucesión de convergentes: $\frac{29}{1}$, $\frac{59}{2}$, $\frac{147}{5}$, $\frac{206}{7}$, $\frac{1177}{40}$... Los dos primeros no son muy precisos, en el primer caso, al finalizar una rotación de Saturno, la posición de la tierra ha avanzado cerca de una mitad de vuelta, en el segundo el error sobrepasa los 4°. La quinta convergente es técnicamente difícil, exige la fabricación de una rueda de más de 1000 dientes o varias ruedas. La cuarta ofrece una precisión cercana a $\frac{3}{1000}$. Es la que escoge Huygens.

Si la Tierra da 100 vueltas completas, sobre el autómata planetario, Saturno da $100 \cdot \frac{7}{206} = \frac{700}{206}$, o sea tres vueltas y un ángulo de 143° 18'. Cuando en la realidad, Saturno ha girado 143° 26'. Este da un error de 8 minutos de ángulo, ampliamente inferior a las imprecisiones mecánicas del reloj. Un cálculo análogo para la fracción $\frac{147}{5}$, en las mismasvueltas, un error superior a un grado, para unos engranajes de una dificultad técnica parecida.

Una aplicación en la astronomía: Eclipses lunares.

Un eclipse lunar se produce cuando la luna penetra en el cono de sombra creado por la tierra, al interponerse ésta entre el sol y la luna.

Los eclipses sólo se producen cuando la luna nueva o llena se encuentra en los llamados nodos ascendentes o descendentes de la órbita que describe alrededor de la Tierra.

Por lo tanto el eclipse depende

- Del intervalo entre dos fases iguales consecutivas de La Luna, el cual es llamado *Mes Sinódico* que tiene una duración de 29’5306 días.
- Del intervalo de tiempo entre el paso de la luna por dos nodos consecutivos, el cual se llama *Mes Dracóntico* y tiene una duración de 27’2122 días

Luego el intervalo de tiempo entre dos eclipses consecutivos debe ser igual a una cantidad entera de meses sinódicos, que a su vez contenga una cantidad entera de meses dracónticos. Es decir si y = 29’5306 y z = 27’2123 se desea obtener una relación del tipo $qx = pz$ con p y q números enteros positivos. Esto es, si hacemos $x = \frac{y}{z}$ = 1’08519 entonces la pregunta es ¿Cuál es la fracción $\frac{p}{q}$ con menor denominador que está más cercana a 1’08519? Para resolver este problema, usamos fracciones continuas.

En primer lugar, hallamos los coeficientes a_i de la expansión $x = [a_0; ..., a_n]$. En segundo lugar, hallamos las convergentes de esta fracción continua. Colocando toda esta información en una tabla nos da

n	a_{n+1}	p_n	q_n	x_n
0	11	1	1	1
1	1	12	11	1’09091
2	2	13	12	1’08333
3	1	38	35	1’08571
4	4	51	47	1’08511
5	2	242	223	1’08520
6	9	535	493	1’08519
7	1	5057	4660	1’08519

Las distintas aproximaciones a x vendrán dadas por los convergentes x_n. Vemos que el valor $\frac{242}{223}$ es aceptable pues difiere de x en 10^{-5} días, lo cual es $3600 \cdot 24 \cdot 10^{-5}$ sg = 0’864 sg, lo cual es depreciable, pues los eclipses tienen una duración promedio de 50 minutos. Luego se tiene la relación fundamental: 223 meses sinódicos = 242 meses dracónticos. Esta relación, conocida como **Ciclo de Saros**, fue descubierta por los astrónomos de la antigua Mesopotamia.

Finalmente, para calcular el período entre dos eclipses multiplicamos: 223·29’5306 = 6585’3238 días = 18 años y 14 días. Por lo tanto, los eclipses de luna ocurren cada 19 años aproximadamente.

Fracciones continuas y música

Para estudiar un sonido hay, al menos, tres cualidades que debemos tener en cuenta: La *intensidad* que es la medida de lo fuertes o débiles que son los sonidos. El *tono* determina la altura de un sonido, es decir lo grave o agudo que es. El *timbre* es la cualidad que nos permite distinguir sonidos idénticos emitidos por instrumentos distintos.

Una afinación o un sistema de afinación es el conjunto de los sonidos que utiliza la Música. En el conjunto de las frecuencias de todos los sonidos, R^+, tenemos que elegir aquellos que sirven para hacer música y descartar el resto. Los sonidos admitidos por el sistema de afinación se denominarán sonidos afinados o notas musicales. Según sea la naturaleza de los números elegidos se tiene dos tipos de sistemas de afinación: las afinaciones y los temperamentos. En las primeras todos los números son racionales mientras que en los temperamentos algunos (o todos) son irracionales.

En todos los sistemas de afinación aparece el concepto de *octava*. Un sonido de frecuencia f_1 se dice que es una octava más grave que otro f_2 si $f_2 = 2 \cdot f_1$. A partir del concepto de octava, lo que se hace es partir el intervalo de frecuencias audibles por octavas: … $[f, 2f]$, $[2f, 4f]$, $[4f, 8f]$, … e identifican las notas que están a diferente octava. Es decir, hablaremos de un Do sin importarnos la octava en la que se encuentra. Por tanto, es mucho más cómodo suponer que las notas están en el intervalo [1, 2]. Afinar es elegir una cantidad finita de puntos del intervalo [1, 2]

Al menos desde el primer milenio antes de Cristo, los caldeos relacionaron muy estrechamente la música con la astrología y las matemáticas. De hecho, el destino de los hombres y la armonía del Universo se explicaba usando especulaciones matemáticas a las que atribuían multitud de propiedades. Parece ser que esto dio lugar a que numerosos fenómenos cósmicos fuesen representados por la comparación entre las longitudes de cuerdas tirantes. De este modo aparecieron cuatro relaciones asociadas con las cuatro estaciones del año que, por su importancia, tomaron nombres propios: $\frac{1}{1}$ *unísono,* $\frac{3}{2}$ *quinta*, $\frac{4}{3}$ *cuarta,* $\frac{2}{1}$ *octava* Entre los números cuyas propiedades eran especialmente útiles en la predicción de sucesos destacaban el 4 y el 7. De hecho, probablemente la antigua escala caldea era de siete notas. En occidente, a partir de los caldeos y sobre todo de los pitagóricos (siglo VI. a. C.) se ha considerado que las notas fundamentales eran 7 y que el resto eran alteraciones de estas notas (a las alteraciones se les llama sostenidos (#) si aumentan la frecuencia y bemoles (b) si la disminuyen).

Es muy probable que Pitágoras, tras un largo periodo de estudio en las escuelas mesopotámicas, llevase las teorías de la música y los principios de la afinación a Grecia. Tal y como hacían los caldeos, estableció que el sonido musical producido por una cuerda vibrante varía en razón inversa a su longitud, esto es: "cuanto más corta sea la cuerda, más aguda será la nota producida". Además, estableció cuatro intervalos, o relaciones entre las longitudes de las cuerdas que producían las únicas consonancias admitidas: Para producir todos los sonidos afinados (notas musicales) sólo se dispone de estos cuatro intervalos y sus combinaciones. Desde luego, la forma de elegir los sonidos afinados no es única y, de hecho, en la orquesta clásica conviven varias afinaciones diferentes.

Expresado de forma axiomática, el sistema de afinación pitagórico se obtiene de la forma siguiente:

Ax. 1: La música se basa en 7 notas.

Ax. 2: La longitud de las cuerdas puede ser multiplicada o dividida por 3 cualquier número de veces.

Ax. 3: La longitud de las cuerdas puede ser multiplicada o dividida por 2 cualquier número de veces.

En lugar de manejar la longitud de las cuerdas estudiaremos las frecuencias producidas por éstas. El Axioma 2 sube quintas cuando se multiplica por 3 y las baja cuando se divide y el Axioma 3 sube o baja octavas cuando se multiplica o divide por 2. El sistema de afinación que se obtiene con los axiomas anteriores es relativo porque dada una cuerda L de cualquier longitud, aplicando Ax. 1, Ax. 2 y Ax. 3 se obtienen notas que suenan afinadas con la producida por L. Para que este sistema de afinación sea absoluto, y por tanto aplicable, necesitamos imponer que una nota, a la que denominaremos nota patrón o diapasón, forme parte de las notas afinadas. Consideramos una frecuencia patrón f_0. Estará afinada cualquier nota que se obtenga subiendo o bajando f_0 cualquier número de quintas justas, es decir las que sean de la forma $f_0\ (3/2)^n$, siendo n un número entero. Ahora bien, como hemos dicho que una afinación consiste en elegir puntos de [1, 2], debemos dividir o multiplicar por una potencia de 2 adecuada de manera que el factor que multiplica a f esté en el intervalo [1, 2].

Es decir, dado un sonido f diremos que está afinado en el sistema pitagórico si existen n y m números enteros de manera que: $3^n 2^m f_0 = f$.

Ya estamos en condiciones de obtener de forma práctica las notas de la afinación pitagórica. Todas las notas de la afinación pitagórica se obtienen pues aumentado o disminuyendo quintas, es decir, dada una frecuencia f multiplicamos o dividimos por $\frac{3}{2}$ cualquier número de veces.

Ejemplo: Supongamos que el sonido f lo subimos dos quintas. La nota que se obtendría es:

$$f \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = f \cdot \left(\frac{9}{4}\right)$$

Para llevar esta nota a la misma octava que f (hacer que el factor que multiplica a f esté en el intervalo [1, 2] debemos dividir por 2. Es decir que la nueva nota afinada será:

$$f \cdot \left(\frac{9}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = f \cdot \left(\frac{9}{8}\right)$$

Método para obtener las notas:

1.- Asociamos cada una de las notas con un número, es decir:

0 = Do, 1 = Re, 2 = Mi, 3 = Fa, 4 = Sol, 5 = La, 6 = Si

2.- Escribimos tablas de 7 columnas y 4 filas:

0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6

En la primera fila marcamos la nota central (3)

0	1	2	**3**	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6

A partir de la nota **3** marcamos las notas que se obtienen contando 5 casillas (contando la casilla de partida ó 4 sin contarla)

0	1	2	**3**	4	5	6
0	1	2	3	**4**	5	6
0	**1**	2	3	4	**5**	6
0	1	**2**	3	4	5	**6**

Cada vez que hemos marcado una casilla nueva hemos aumentado una quinta, y repitiendo el proceso siete veces obtenemos las notas naturales en el orden siguiente:

Fa – Do – Sol – Re - La - Mi - Si

Para obtener más notas ampliamos el número de matrices o tablas. Con ellas aparecerán, en un sentido, las notas con un sostenido, con dos, etc. y en el sentido contrario las notas con 1 bemol, 2 bemoles, etc.

. . . 0 1 2 **3** 4 5 6 **0** 1 2 3 **4** 5 6 0 **1** 2 3 4 **5** 6 0 1 **2** 3 4 5 **6**	Notas con 2 bemoles	
0 1 2 **3** 4 5 6 **0** 1 2 3 **4** 5 6 0 **1** 2 3 4 **5** 6 0 1 **2** 3 4 5 **6**	Notas con 1 bemol	DIVIDIR ENTRE 3/2
0 1 2 **3** 4 5 6 **0** 1 2 3 **4** 5 6 0 **1** 2 3 4 **5** 6 0 1 **2** 3 4 5 **6**	Notas naturales	
0 1 2 **3** 4 5 6 **0** 1 2 3 **4** 5 6 0 **1** 2 3 4 **5** 6 0 1 **2** 3 4 5 **6**	Notas con 1 sostenido	MULTIPLICAR POR 3/2
0 1 2 **3** 4 5 6 **0** 1 2 3 **4** 5 6 0 **1** 2 3 4 **5** 6 0 1 **2** 3 4 5 **6** . . .	Notas con 2 sostenidos	

Cada vez que vamos de una nota marcada a otra bajando en la tabla multiplicamos por $\frac{3}{2}$ tantas veces como notas marcadas haya. Y en el sentido contrario lo que haremos es dividir por $\frac{3}{2}$.

Ejemplo: A partir de un Do (natural), ¿cómo se obtiene un Fa# y un Mi^b?

a) Desde el Do (natural) al Fa# hay que subir 6 quintas (hemos contado 6 casillas de las que hemos marcado previamente) por tanto se obtiene de la forma siguiente:

$$Fa^{\#} = Do \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 = Do \cdot \frac{729}{64}$$

Para que el Do (natural) y el Fa# estén en la misma octava debemos dividir por una potencia de 2, en concreto 2^3, es decir:

$$Fa^{\#} = Do \cdot \frac{729}{64} \cdot \frac{1}{2^3} = Do \cdot \frac{729}{512} = Do \cdot \frac{3^6}{2^9}$$

b) Desde el Do (natural) al Mi^b hay que bajar 3 quintas (hemos contado 3 casillas de las que hemos marcado previamente) por tanto se obtiene de la forma siguiente:

$$Mi^b = Do \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = Do \cdot \left(\frac{8}{27}\right)$$

Para que el Do (natural) y el Mi^b estén en la misma octava debemos multiplicar por una potencia de 2, en concreto 2^2, es decir :

$$Mi^b = Do \cdot \left(\frac{8}{27}\right) \cdot 2^2 = Do \cdot \left(\frac{32}{27}\right) = Do \cdot \frac{2^5}{3^3}$$

Las fracciones para obtener las notas más frecuentes son las siguientes:

Fa	Do	Sol	Re	La	Mi	Si
$\frac{2^2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^5}{2^7}$
Fa#	$Do^{\#}$	$Sol^{\#}$	$Re^{\#}$	$La^{\#}$	$Mi^{\#}$	$Si^{\#}$
$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$
Fa^b	Do^b	Sol^b	Re^b	La^b	Mi^b	Si^b
$\frac{2^{13}}{3^8}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{2^4}{3^2}$

Para el sistema pitagórico, por ejemplo un La^b y un Sol# son dos notas diferentes:

Después de esta larga introducción, ahora vienen las fracciones continuas, *¿Cuántas notas deben aparecer dentro de una octava?*

Con el método que hemos descrito podríamos generar una cantidad infinita de notas dentro de una misma octava, por tanto debemos añadir algún criterio que permita detenernos cuando se tiene una cantidad razonable de ellas. Sería lógico pensar que un buen momento para parar es cuando empiecen a repetirse los sonidos. Sin embargo, como se puede demostrar que esto no va a ocurrir nunca, deberemos conformarnos con aceptar como iguales, sonidos que sean "muy parecidos".

Con lo dicho, la afinación pitagórica está formada por los sonidos $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ transportados a la octava [1, 2]. Para este transporte no hay más que dividir $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ por una potencia de 2 adecuada, de modo que se verifique:

$$1 \le \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{2^k} < 2 \, , n \, , k \in Z$$

En esta desigualdad, para cada valor n, el valor de k está determinado unívocamente. Basta multiplicar por $2k$ y tomar logaritmos en base 2 para obtener las inecuaciones siguientes:

$$2^k \le \left(\frac{3}{2}\right)^n < 2^{k+1} \Rightarrow k \le \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)^n < k+1$$

Ahora bien, como k es un número entero, se trata de la parte entera por defecto de $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)^n$, es decir $k = Ent[n\log_2\left(\frac{3}{2}\right)]$. Sabemos que la fracción que elegimos para aproximar a $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ marca la cantidad de notas en una octava, pero al reducir toda la afinación a q notas, no debemos pasar por alto ninguna cantidad de notas que, siendo menor que q, aproxime mejor a $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$.

Calculamos algunos convergentes de la fracción continua asociada a $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$.

Aproximando $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$= 0’5849625 = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 13, 1]

En cualquier caso, los 10 primeros convergentes de su fracción continua son los siguientes:

$$0<\frac{1}{2}<\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}<\frac{31}{53}<\frac{389}{665}<\ldots\leq\log_2\left(\frac{3}{2}\right)\leq\ldots<\frac{5236}{8951}<\frac{179}{306}<\frac{24}{41}<\frac{3}{5}<1$$

El denominador de cada uno de los convergentes nos indica cuál es el número de notas por octava para una cierta precisión. Por ejemplo, como 5 notas resultan insuficientes, se recurre a 12 notas por octava. Esta es la razón matemática por la que casi toda la música actual utiliza doce notas. Si quisiéramos mayor precisión deberíamos recurrir 41, 53, etc., pero estas divisiones son poco habituales en la práctica.

Si partimos de la nota Do, con f = 264.6265 Hz, para obtener las notas del sistema temperado o doce notas de la afinación pitagórica, basta con multiplicar f por las fracciones o potencias que aparecen en la tabla siguiente:

	Do	Do$^{\#}$	Re	Mi	Mi^{b}	Fa	Fa#	Sol	Sol$^{\#}$	La	Si^{b}	Si
12 notas pitagóricas	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
Temperamento igual	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$

SOLUCIONES:

EJERCICIO 0: A) $\frac{3}{5}=0'6$; B) $\frac{5}{7}=0'7\widehat{14285}$; C) $\frac{7}{9}=0'\hat{7}$; D)$\frac{9}{11}=0'\widehat{81}$; E) $\frac{11}{13}=0'\widehat{84615}$

EJERCICIO 1:

a) [3; 6, 2]; b) [0; 1, 2, 12]; c) [0; 7]; d) [– 2; 1, 1, 2, 1, 2]

EJERCICIO 2:

a)$\frac{71}{31}$; b)$\frac{-120}{47}$; c)$\frac{251}{802}$

EJERCICIO 3:

a)$\frac{59}{21}$; b)$\frac{73}{26}$; c)$\frac{87}{31}$; d)$\frac{101}{36}$; e)$\frac{14}{5}$; f)$\frac{17+14\cdot(n-1)}{6+5\cdot(n-1)}=\frac{14n+3}{5n+1}$; $(\frac{17}{6}=[2;1,4,1])$

EJERCICIO 4:

a) $\frac{151}{115};\frac{21}{16};\frac{151}{21}$; b) $\frac{8}{5};\frac{3}{2};\frac{8}{3}$

EJERCICIO 5: a) $2'34=\frac{1+\frac{1+\frac{1+\frac{1}{50}}{3}}{1}}{1}$; b) $4'17=\frac{1+\frac{1+\frac{1+\frac{1+\frac{1+\frac{1}{50}}{6}}{1}}{1}}{1}}{1}$

EJERCICIO 6: a) $[1;\overline{1,2}]$; b) $[2;\overline{4}]$; c) $[2;\overline{2,4}]$; d) $[3;\overline{2,6}]$

EJERCICIO 7: a) $1+\sqrt{3}$; b) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; c) $\frac{5+\sqrt{10}}{3}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

EJERCICIO 8:

a) $\frac{25}{13}=[1;1,12]$; $\frac{13}{25}=[0;1,1,12]$; b) $\frac{4}{35}=[0;8,1,3]$; $\frac{35}{4}=[8;1,3]$ c) $1+\sqrt{5}=[3;\overline{4}]$;

$\frac{1}{1+\sqrt{5}}=[0;3,\overline{4}]$ d) $3-\sqrt{3}=[1;3,\overline{1,2}]$ $\frac{1}{3-\sqrt{3}}=[0;1,3,\overline{1,2}]$

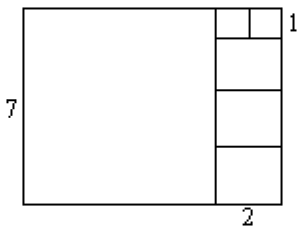
EJERCICIO 9: a) $\frac{253}{179}=[1;2,2,2,1,1,2,2]$; b) $\frac{832}{159}=[5;4,3,2,1,3]$;

c) $\frac{729}{2318}=[0;3,5,1,1,3,2,1,5]$; d) $\frac{1189}{3927}=[0;3,3,3,3,3,3,3]$

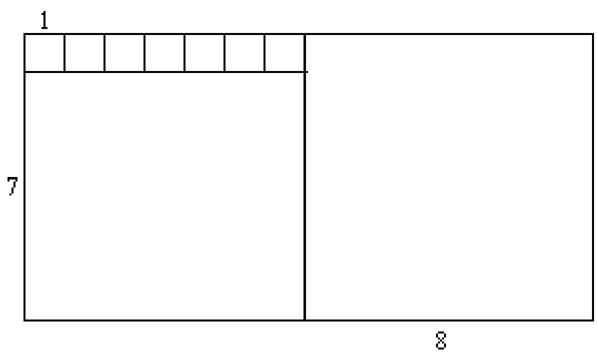
EJERCICIO 10: a) [1; 4]; b) [2; 1, 4]; c) [1; 2, 1, 4]

EJERCICIO 11:

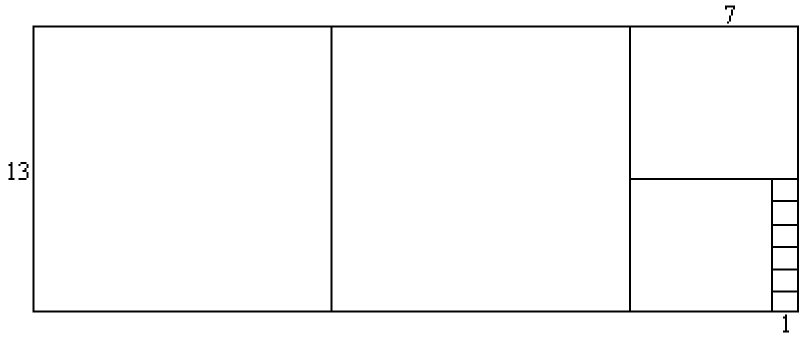
a)



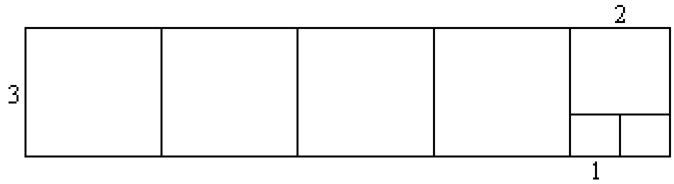
b) $\frac{30}{16}=\frac{15}{8}$



c)



d) $\frac{42}{9} = \frac{14}{3}$



EJERCICIO 12:
En efecto BG = 1 – 4· EC = $1 - 4 \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) = 9 - 4\sqrt{5}$;

$$\frac{BC}{EC} = \frac{BG}{FB} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{9-4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}-2\right)^2 = 9-4\sqrt{5}$$

EJERCICIO 13: $\frac{p_9}{q_9} = \frac{571}{209}, \frac{p_{10}}{q_{10}} = \frac{1560}{571}$

EJERCICIO 14: El señor tiene que dar al cajero 14 monedas de 2 €, y éste tiene que devolverle un billete de 5 €.
EJERCICIO 15: el valor del cheque era de 25 dólares y 51 centavos.
EJERCICIO 16: Se han comprado x = 5 libros de 68 € e y = 11 libros de 76 €.
EJERCICIO 17: 3121 es el mínimo número de cocos