SOLUCIONES

1. El número 2^{29} tiene 9 dígitos distintos. Sin usar calculadora, hallar el dígito omitido.

   Solución:

   Sabemos que un número es congruente con la suma de sus dígitos módulo 9. Notar que $0+1+2+\cdots+9=45$, que es divisible por 9. Por otra parte,
$$2^{29}=2^{3\cdot 9+2}\equiv(-1)^9 2^2\equiv -4 \pmod{9}.$$
   Por tanto, el dígito omitido es 4.

   Nota. $2^{29}=536870912$

2. (Preparación para las Olimpiadas, Universidad de Puerto Rico)

   a) Demostrar que la suma de los dígitos, en notación decimal, de un cuadrado, no puede ser igual a 1991 (o a 2012).

   b) Hallar todos los primos de la forma n^3-1, donde n es un entero positivo.

   Solución:

   a) Es fácil probar que, módulo 9, un número es congruente con la suma de sus cifras. Por lo tanto, la suma de los dígitos de un cuadrado será congruente con 0, 1, 4 o 7, que son los posibles restos al dividir un cuadrado por 9. Pero $1991\equiv 2$ y $2012\equiv 5$ (mód 9), de manera que ambas cantidades nunca podrán ser iguales.

   b) Que un número sea primo significa que sus únicos factores son 1 y él mismo. Si factorizamos la expresión del enunciado tenemos:

   $n^3-1=(n-1)\cdot(n^2+n+1)$

   El menor de estos factores habrá de ser 1 y por lo tanto $n-1=1$,
   $n=2$, y el único primo de esa forma es $2^3-1=7$.

3. Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todo nueves (Por ejemplo, si p=13, 999999=13·76923)

(OME 2003)

Solución:

Sea a_i el número formado por i nueves. Supongamos que existe un primo p tal que p no divide a_i para ningún entero i.

Consideremos el conjunto de número $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$, sabemos que no hay ningún $a_i \equiv 0(mod\ p)$. Por tanto, al haber p números en el conjunto y sólo p-1 restos posibles módulo p, se sabe que existen m,n tales que $a_m - a_n \equiv 0(mod\ p)$

Suponemos sin pérdida de generalidad que m>n y tenemos que $p|a_m - a_n = a_{m-n}10^n$

Como $p \neq 2$ y $p \neq 5$ tenemos que p no divide a 10^n, por lo tanto p divide a a_{m-n} y como a_{m-n} pertenece al conjunto escogido por ser $1 \leq m-n \leq n$ se ha llegado a una contradicción y el enunciado queda probado

4. Sea p un primo de la forma $3k+2$ que divide a a^2+ab+b^2 para ciertos enteros a y b. Probar que a y b son divisibles por p.

   Solución:
   Como $p \mid a^2+ab+b^2$, deducimos que p también divide a $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, luego $a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$. Por tanto,

   $$a^{3k} \equiv b^{3k} \pmod{p}.$$

   Supongamos que $p \nmid a$. Entonces $p \nmid b$. Así, aplicando el pequeño teorema de Fermat obtenemos $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, o bien

   $$a^{3k+1} \equiv b^{3k+1} \pmod{p}.$$

   Como p es primo relativo a a, deducimos que $a \equiv b \pmod{p}$. Juntando esto con $a^2+ab+b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, obtenemos que $3a^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Como $p \neq 3$ y $p \nmid a$, obtenemos una contradicción.

   Por tanto $p \mid a$ y análogamente (dada la simetría en el enunciado entre a y b) obtenemos que $p \mid b$.

5. (Fase Local, OME 2011) Calcula todos los números enteros a, b y c tales que $a^2 = 2b^2 + 3c^2$.

   Solución:

Sea (a, b, c) una solución distinta de (0, 0, 0), con $|a| + |b| + |c|$ mínimo. Tomando la igualdad módulo 3, tenemos $a^2 = 2b^2$ módulo 3. Como a^2 y b^2 sólo pueden ser congruentes con 1 o 0, se deduce que a y b son múltiplos de 3. Por tanto, $3c^2$ es múltiplo de 9, así que c también es múltiplo de 3. Pero entonces, (a/3, b/3, c/3) sería otra solución con $|a/3|+|b/3|+|c/3| < |a|+|b|+|c|$, lo que contradice la hipótesis supuesta.

6. Probar que 1982|222.....22 (1980 doses)

   Solución:

   Dividiendo por dos, obtenemos que lo que tenemos que probar es que 991|111...11 (1980 unos).

   Pero, tenemos que 111...11=$(10^{1980}$-1)/9. Además, tenemos que $(10^{1980}$-1)=$(10^{990}$-1)$(10^{990}$+1). Como 991 es primo, por el teorema de Fermat tenemos que 991|$(10^{990}$-1) lo que prueba el resultado.

7. Demostrar que $5555^{2222} + 2222^{5555}$ es múltiplo de 7.:

   Solución:

   Vemos que tomando módulo 7, $5555 \equiv 4$ y $2222 \equiv 3$. Además, $4^3 \equiv 1$ y $3^6 \equiv 1 \pmod 7$. Luego

   $5555^{2222}+2222^{5555} \equiv 4^{2222}+3^{5555} \equiv 4^{3\cdot 740+2}+3^{6\cdot 925+5} \equiv 4^2+3^5 \equiv 0 \pmod 7$.

8. (British Mathematical Olympiad, Round 1, 2008 - 2009) Encontrar todos los enteros positivos n tales que n + 2008 divide a $n^2 + 2008$ y n + 2009 divide a $n^2 + 2009$.

   Find all positive integers n such that both n + 2008 divides $n^2 + 2008$ and n + 2009 divides $n^2 + 2009$.

   Solución:

   Si n + 2008 divide a $n^2 + 2008$, entonces también dividirá a $(n^2 + 2008) - (n + 2008) = = n^2 - n$. De un modo similar llegamos a la conclusión de que n + 2009 también divide a $n^2 - n$. Ahora bien, n + 2008 y n + 2009 son consecutivos y por lo tanto no tienen factores en común aparte del 1. De modo que si $n^2 - n$ es divisible por ambos, tendrá que ser divisible por su producto, $(n + 2008)\cdot(n + 2009)$. Pero este producto es claramente mayor que $n^2 - n$, así que sólo nos queda la posibilidad de que $n^2 - n$ sea 0, caso que se da cuando n toma los valores 0 o 1, que son la solución al problema.

9. Encontrar todos los números enteros postivos n tales que 3^n+5^n es múltiplo de $3^{n-1}+5^{n-1}$:

   (Fase Local 2005)

   Solución:

   Para un n como el pedido, tenemos que

   $3(3^{n-1}+5^{n-1})<3^n+5^n<5(3^{n-1}+5^{n-1})$

   Por tanto se verifica que $3^n+5^n=4(3^{n-1}+5^{n-1})$

   Lo cual se reduce a $5^{n-1}=3^{n-1}$que implica n=1. Así, n=1 es la única solución.