Preparación para la XLVIII Olimpiada Matemática Española

Eva Elduque Laburta y Adrián Rodrigo Escudero

21 de octubre de 2011

Problema 1 (OME 2003, fase local)**.** Dado el polinomio $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, prueba que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D = C^3$.

Problema 2 (OME 1987, fase local)**.** Consideramos el polinomio con coeficientes reales $P(x) = x^3 + px + q$, donde $q \neq 0$. Sabemos que las raíces de dicho polinomio son todas reales. Demostrar que $p < 0$.

Problema 3 (Materiales para preparación olímpica)**.** Determina la relación entre b y c para que estén en progresión aritmética las raíces de

$$x^3 + bx^2 + cx = 0$$

Problema 4 (Materiales para preparación olímpica)**.** Al dividir $p(x)$ por $(x+2)$, $(x-2)$ y por $(x+3)$ se obtienen los restos 4, 8, y 13, respectivamente. Determinar el resto de dividir $p(x)$ por $(x+2)(x-2)(x+3)$.

Problema 5 (OME 2004, fase local)**.** Consideremos los polinomios $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ (x es la variable, a, b, c, A, B, C son parámetros). Sabemos que las tres raíces de P son positivas y que las raíces de Q son los números inversos de las raíces de P. Probad que $a \cdot A \geq 9$, $b \cdot B \geq 9$.

Ayuda. Recuerda la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica: Si y_1, y_2, y_3 son números positivos, entonces:

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \geq \sqrt[3]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$$

Y la igualdad se da si y sólo si $y_1 = y_2 = y_3$.

Problema 6 (OME 2004, fase local). Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si a, b, c son las tres raíces de P, las de Q son $(a + b)/2, (b + c)/2$. Determinad todos los posibles polinomios P, Q.

Problema 7 (OME 1997, fase nacional). Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en $\mathbb{R}$ pasan por un punto fijo que se determinará.

Problema 8 (Materiales para preparación olímpica). En un trapecio $ABCD$, las diagonales AC y BD se cortan en P. Demostrar que el área del triángulo PBC es media geométrica entre las áreas de los triángulos ABP y PCD.