# Preparación para la XLVIII Olimpiada Matemática Española

Eva Elduque Laburta y Adrián Rodrigo Escudero

21 de octubre de 2011

**Problema 1** (OME 2003, fase local)**.** Dado el polinomio $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, prueba que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D = C^3$.

**Solución.** Sean $a, b, c$ las raíces de $p(x)$. Igualando coeficientes en la expresión $x^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - a)(x - b)(x - c)$ obtenemos las fórmulas de Vieta (muy útiles a la hora de resolver problemas de polinomios):

$$\begin{aligned} B &= -(a + b + c) \\ C &= ab + bc + ca \\ D &= -abc \end{aligned}$$

Ahora se trata simplemente de calcular teniendo en cuenta que $a^2 = bc$:

$$\begin{aligned} B^3D &= (a + b + c)^3 abc = (a + b + c)^3 a^3 \\ &= (aa + ba + ca)^3 = (bc + ba + ca)^3 = C^3 \end{aligned}$$

**Problema 2** (OME 1987, fase local)**.** Consideramos el polinomio con coeficientes reales $P(x) = x^3 + px + q$, donde $q \neq 0$. Sabemos que las raíces de dicho polinomio son todas reales. Demostrar que $p < 0$.

**Solución.** Llamemos $a, b, c$ a las raíces de $P(x)$. Tenemos que $x^3+px+q = (x - a)(x - b)(x - c)$, e igualando coeficientes obtenemos:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ ab + bc + ca &= p \\ abc &= -q \neq 0 \end{aligned}$$

La tercera ecuación se traduce en que $a, b, c$ son distintos de cero.

Calculamos:

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2p$$

Como $a, b, c$ son distintos de cero, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, luego debe ser $p < 0$.

**Problema 3** (Materiales para preparación olímpica)**.** Determina la relación entre $b$ y $c$ para que estén en progresión aritmética las raíces de

$$x^3 + bx^2 + cx = 0$$

**Solución.** Notamos que 0 es raíz del polinomio. Por tanto las tres raíces pueden ser $-d, 0, d$ ó $0, d, 2d$, según 0 se encuentre en el centro o en los extremos de la progresión. (Observa que puede que $d$ no sea positivo.)

En el primer caso tenemos que $x^3 + bx^2 + cx = (x - (-d))(x - 0)(x - d)$. Igualando coeficientes obtenemos que $b = 0$, $c = -d^2$. Como $d$ es cualquiera, la segunda condición se traduce en que $c$ debe ser menor o igual que cero.

El segundo caso es $x^3 + bx^2 + cx = (x - 0)(x - d)(x - 2d)$. De nuevo calculando llegamos a que $b = -3d$, $c = 2d^2$. Es decir, $(b/3)^2 = c/2$.

Por último, se comprueba fácilmente que si $b$ y $c$ cumplen una de las dos relaciones que hemos dado, entonces las tres raíces del polinomio $x^3 + bx^2 + cx$ están en progresión aritmética.

**Problema 4** (Materiales para preparación olímpica)**.** Al dividir $p(x)$ por $(x+2)$, $(x-2)$ y por $(x+3)$ se obtienen los restos 4, 8, y 13, respectivamente. Determinar el resto de dividir $p(x)$ por $(x + 2)(x - 2)(x + 3)$.

**Solución.** Aplicando el algoritmo de la división a $p(x)$ entre $(x + 2)(x - 2)(x + 3)$ obtenemos que:

$$p(x) = q(x) \cdot (x + 2)(x - 2)(x + 3) + r(x)$$

Donde $r(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que dos, $r(x) = ax^2 + bx + c$.

Nos dicen que $p(-2) = 4$, $p(2) = 8$, $p(-3) = 13$. Sustituyendo en la igualdad anterior vemos que $r(-2) = 4$, $r(2) = 8$, $r(-3) = 13$, con lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4a - 2b + c &= 4 \\ 4a + 2b + c &= 8 \\ 9a - 3b + c &= 13 \end{aligned}$$

Resolviéndolo vemos que como única solución: $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, es decir, $r(x) = 2x^2 + x - 2$.

**Problema 5** (OME 2004, fase local). Consideremos los polinomios $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ ($x$ es la variable, $a, b, c, A, B, C$ son parámetros). Sabemos que las tres raíces de $P$ son positivas y que las raíces de $Q$ son los números inversos de las raíces de $P$. Probad que $a \cdot A \geq 9$, $b \cdot B \geq 9$.

**Ayuda.** Recuerda la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica: Si $y_1, y_2, y_3$ son números positivos, entonces:

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \geq \sqrt[3]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$$

Y la igualdad se da si y sólo si $y_1 = y_2 = y_3$.

**Solución.** Llamemos $\alpha, \beta, \gamma$ a las tres raíces de $P$. Igualando coeficientes en la igualdad $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ tenemos que $a = -\alpha - \beta - \gamma$, $b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$. El enunciado nos dice que las tres raíces de $Q$ serán $\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$, y por un razonamiento análogo al anterior, $A = -\alpha^{-1} - \beta^{-1} - \gamma^{-1}$, $B = \alpha^{-1}\beta^{-1} + \beta^{-1}\gamma^{-1} + \gamma^{-1}\alpha^{-1}$.

Primero probemos que $a \cdot A \geq 9$:

$$a \cdot A = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$$

Y aplicando la desigualdad de las medias a los dos factores:

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq \left(3\sqrt[3]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}\right) \cdot \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma}}\right) = 9$$

El razonamiento para ver que $b \cdot B \geq 9$ es el mismo:

$$\begin{aligned} b \cdot B &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right) \\ &\geq \left(3\sqrt[3]{\alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha}\right) \cdot \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{\beta\gamma} \cdot \frac{1}{\gamma\alpha}}\right) = 9 \end{aligned}$$

**Problema 6** (OME 2004, fase local). Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ ($x$ es la variable, $A, B, C$ son parámetros). Supongamos que, si $a, b, c$ son las tres raíces de $P$, las de $Q$ son $(a + b)/2, (b + c)/2$. Determinad todos los posibles polinomios $P, Q$.

**Solución.** Observamos que $Q$ es la derivada de $P$. Por tanto, teniendo en cuenta que $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, podemos escribir $Q(x)$ como:

$$Q(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$$

Nos dicen que $(a+b)/2, (b+c)/2$ son las raíces de $Q$. Sustituyendo y simplificando obtenemos:

$$0 = Q\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$0 = Q\left(\frac{b+c}{2}\right) = -\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

La primera condición obliga a que $a = b$, mientras que la segunda impone que $b = c$.

Hemos probado que un polinomio $P$ que cumpla lo pedido debe ser de la forma $P(x) = (x-a)^3$, siendo $a$ un parámetro. Recíprocamente, cualquier polinomio $P$ de la forma $P(x) = (x-a)^3$, con $a$ parámetro, cumple que su derivada tiene como raíces a $(a+a)/2, (a+a)/2$.

**Problema 7** (OME 1997, fase nacional)**.** Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar $p$ y $q$ en $\mathbb{R}$ pasan por un punto fijo que se determinará.

**Solución.** Si $a$ y $b$ son las dos raíces del polinomio $P(x) = x^2 + px + q$, entonces el enunciado nos dice que la circunferencia pasa por los puntos $(a, 0)$, $(b, 0)$ y $(0, ab)$ (hemos tenido en cuenta que $P(0) = q = ab$). A partir de aquí damos dos soluciones distintas:

1. Como el eje $OX$ corta a la circunferencia en $(a, 0)$ y en $(b, 0)$, la potencia del punto $(0, 0)$ respecto de dicha circunferencia es $a \cdot b$. Análogamente, el eje $OY$ corta a la circunferencia en $(0, ab)$ y en otro punto $(0, c)$ (notar que estos dos puntos pueden ser el mismo), luego la potencia también se puede expresar como $ab \cdot c$. La potencia no depende de la recta escogida, luego debe ser $ab = abc$, es decir, $c = 1$. Hemos probado que la circunferencia pasa por el punto $(1, 0)$, que no depende de los parámetros $p, q$.

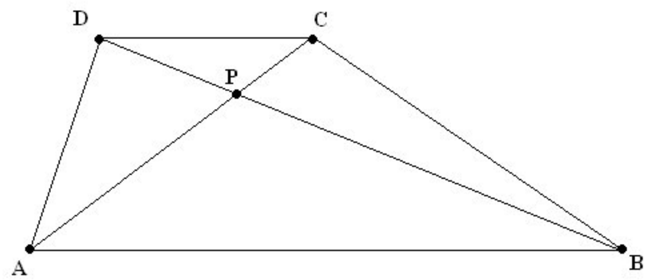
2. Escogemos una parábola concreta, $y = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$. Observamos que corta a los ejes coordenados en $(1, 0)$, $(-1, 0)$, y $(0, -1)$. Por tanto el cuarto punto de corte de la circunferencia es $(0, 1)$. Esto nos encamina a intentar demostrar que el punto fijo es el $(0, 1)$.

   Volviendo al caso general, llamemos $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, ab)$, $D = (0, 1)$, y $O = (0, 0)$. Nuestro objetivo es probar que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico (es decir, que se puede inscribir en una circunferencia, que claramente será la que pase por $A$, $B$ y $C$), con lo que habremos terminado, porque el punto $D$ estará en la circunferencia. Notar que si $ab = 1$, entonces $C = D$ y nuestro cuadrilátero es en realidad un triángulo, pero este caso no hay que tenerlo en cuenta, ya que es claro $D$ estará en la circunferencia que pase por $A$, $B$ y $C$. Para ver que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico demostremos que $\widehat{ADC} = 180^o - \widehat{ABC}$.

Observamos que los triángulos $AOD$ y $BOC$ son semejantes (por tener un ángulo recto y dos lados proporcionales), luego $\widehat{ADO} = \widehat{OBC}$. Por tanto:

$$\widehat{ADC} = 180^o - \widehat{ADO} = 180^o - \widehat{OBC} = 180^o - \widehat{ABC}$$

**Problema 8** (Materiales para preparación olímpica)**.** En un trapecio $ABCD$, las diagonales $AC$ y $BD$ se cortan en $P$. Demostrar que el área del triángulo $PBC$ es media geométrica entre las áreas de los triángulos $ABP$ y $PCD$.




**Solución.**

Llamamos $h_1$ a la altura del triángulo $PCD$ sobre el lado $PD$, y $h_2$ a la altura del triángulo $ABP$ sobre el lado $AP$. Entonces:

$$\text{Á}rea_{PCD} = \frac{h_1 \cdot PD}{2}$$

$$\text{Á}rea_{ABP} = \frac{h_2 \cdot AP}{2}$$

$$\text{Á}rea_{PBC} = \frac{h_1 \cdot PB}{2} = \frac{h_2 \cdot CP}{2}$$

Despejando $h_1$ y $h_2$ en estas cuatro igualdades, e igualando los términos que nos quedan, tenemos:

$$\frac{\text{Á}rea_{PBC}}{PB} = \frac{\text{Á}rea_{PCD}}{PD}$$

$$\frac{\text{Área}_{PBC}}{CP} = \frac{\text{Área}_{ABP}}{AP}$$

Y multiplicando estas dos últimas, nos queda:

$$\frac{\text{Área}^2_{PBC}}{PB \cdot CP} = \frac{\text{Área}_{PCD}}{PD} \cdot \frac{\text{Área}_{ABP}}{AP}$$

Ahora, simplemente tenemos en cuenta que los triángulos $ABP$ y $PCD$ son semejantes, ya que $\widehat{DPC}$ y $\widehat{APB}$ son iguales, y al ser los lados $DC$ y $AB$ paralelos, también tenemos que $\widehat{PCD}$ y $\widehat{PAB}$ son iguales (y por tanto también $\widehat{CDP}$ y $\widehat{PBA}$). Una vez sabemos esto, es claro que $PB \cdot CP = PD \cdot AP$ y por tanto $\text{Área}^2_{PBC} = \text{Área}_{PCD} \cdot \text{Área}_{ABP}$, que es lo que queríamos demostrar.