
DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Diferencias de cuadrados

Taller de Talento Matemático
Bachillerato

Antonio M. Oller Marcén

3 de febrero de 2012


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

El epitafio de Diofanto

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

El epitafio de Diofanto

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6}$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.

LVTETIAE PARISIORVM,

M. DC. XXI.

El epitafio de Diofanto

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12}$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

El epitafio de Diofanto

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

El epitafio de Diofanto

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

El epitafio de Diofanto

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}$$

El epitafio de Diofanto

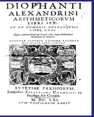
"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

El epitafio de Diofanto

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

El epitafio de Diofanto

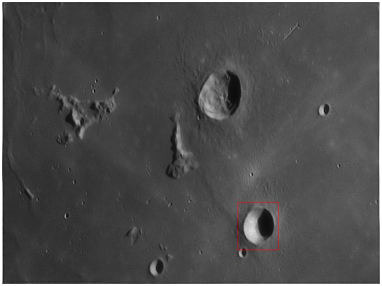
"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

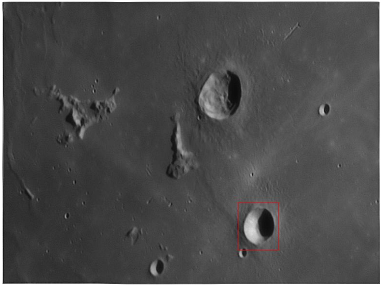
$$\boxed{\text{Diofanto vivió 84 años}}$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Diofanto de Alejandría

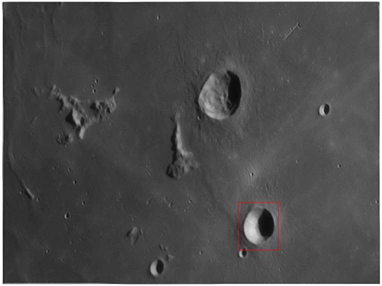


Diofanto de Alejandría



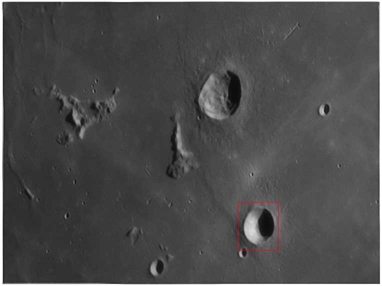
- Vivió en Alejandría durante el siglo III.

Diofanto de Alejandría



- Vivió en Alejandría durante el siglo III.
- Sólo se ha conservado parte de una de sus obras titulada *Aritmética*.

Diofanto de Alejandría



- Vivió en Alejandría durante el siglo III.
- Sólo se ha conservado parte de una de sus obras titulada *Aritmética*.
- Llamamos ecuaciones diofánticas a aquellas de las que sólo nos interesan las soluciones enteras.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

¿Tienen solución estas ecuaciones?

$$2x + 4y = 3$$

$$x^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = -1$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

¿Tienen solución estas ecuaciones?

$$2x + 4y = 3$$

En los enteros no, pero sí en los racionales.

$$x^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = -1$$

¿Tienen solución estas ecuaciones?

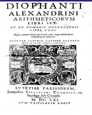
$$2x + 4y = 3$$

En los enteros no, pero sí en los racionales.

$$x^2 = 2$$

En los racionales no, pero sí en los reales.

$$x^2 + y^2 = -1$$



¿Tienen solución estas ecuaciones?

$$2x + 4y = 3$$

En los enteros no, pero sí en los racionales.

$$x^2 = 2$$

En los racionales no, pero sí en los reales.

$$x^2 + y^2 = -1$$

En los reales no, pero sí en los complejos.

Problema I

$$x^2 - y^2 = n$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Problema I

$$x^2 - y^2 = n$$

¿Que debe cumplir n para que esta ecuación tenga solución?

Problema I: casos particulares

¿Tienen solución?

$$x^2 - y^2 = 16$$

$$x^2 - y^2 = 21$$

$$x^2 - y^2 = 18$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Problema I: casos particulares

¿Tienen solución?

$x^2 - y^2 = 16$ SÍ

$x^2 - y^2 = 21$ SÍ

$x^2 - y^2 = 18$ NO

Problema I: solución

$$x^2 - y^2 = n$$

Problema I: solución

$$x^2 - y^2 = n$$

Tiene solución si y sólo si n es impar o múltiplo de 4.

Problema I: interpretación geométrica

$x^2 - y^2 = n^2$ siempre tiene solución (si $n > 2$).

Problema I: interpretación geométrica

$x^2 - y^2 = n^2$ siempre tiene solución (si $n > 2$).

Para cualquier n existen triángulos rectángulos de lados enteros de modo que uno de los catetos mide n.

Problema I: interpretación geométrica

$x^2 - y^2 = n^2$ siempre tiene solución (si $n > 2$).

Para cualquier n existen triángulos rectángulos de lados enteros de modo que uno de los catetos mide n.

¿Pasa lo mismo cambiando cateto por hipotenusa?


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Problema I: interpretación geométrica

$x^2 - y^2 = n^2$ siempre tiene solución (si $n > 2$).

Para cualquier n existen triángulos rectángulos de lados enteros de modo que uno de los catetos mide n.

¿Pasa lo mismo cambiando cateto por hipotenusa? NO

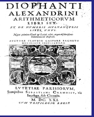
Problema II

$$x^2 - y^2 = n$$

Problema II

$$x^2 - y^2 = n$$

¿Cuántas soluciones tiene?


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Problema II: casos particulares

¿Cuántas soluciones tienen?

$$x^2 - y^2 = 20$$

$$x^2 - y^2 = 81$$

$$x^2 - y^2 = 36$$

$$x^2 - y^2 = 39$$

Problema II: casos particulares

¿Cuántas soluciones tienen?

$$x^2 - y^2 = 20 \qquad 1$$

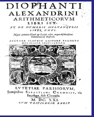
$$x^2 - y^2 = 81 \qquad 3$$

$$x^2 - y^2 = 36 \qquad 2$$

$$x^2 - y^2 = 39 \qquad 2$$

Problema II: inciso

- Denotaremos por $\tau(n)$ al número de divisores de n.
- Denotaremos por $\iota(n)$ al número de divisores impares de n.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Problema II: inciso

- Denotaremos por $\tau(n)$ al número de divisores de n.
- Denotaremos por $\iota(n)$ al número de divisores impares de n.

Cuestiones:

- ¿Es cierto que $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$?

Problema II: inciso

- Denotaremos por $\tau(n)$ al número de divisores de n.
- Denotaremos por $\iota(n)$ al número de divisores impares de n.

Cuestiones:

- ¿Es cierto que $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$? Sólo si son coprimos

Problema II: inciso

- Denotaremos por $\tau(n)$ al número de divisores de n.
- Denotaremos por $\iota(n)$ al número de divisores impares de n.

Cuestiones:

- ¿Es cierto que $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$? Sólo si son coprimos
- Calcula $\tau(p^r)$ con p un primo.

Problema II: inciso

- Denotaremos por $\tau(n)$ al número de divisores de n.
- Denotaremos por $\iota(n)$ al número de divisores impares de n.

Cuestiones:

- ¿Es cierto que $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$? Sólo si son coprimos
- Calcula $\tau(p^r)$ con p un primo. $\tau(p^r) = r + 1$

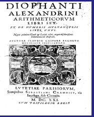

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Problema II: inciso

- Denotaremos por $\tau(n)$ al número de divisores de n.
- Denotaremos por $\iota(n)$ al número de divisores impares de n.

Cuestiones:

- ¿Es cierto que $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$? Sólo si son coprimos
- Calcula $\tau(p^r)$ con p un primo. $\tau(p^r) = r + 1$
- Con lo anterior encuentra una fórmula para $\tau(n)$ a partir de la descomposición de n en factores primos.

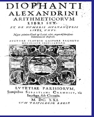


Problema II: inciso

- Denotaremos por $\tau(n)$ al número de divisores de n.
- Denotaremos por $\iota(n)$ al número de divisores impares de n.

Cuestiones:

- ¿Es cierto que $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$? Sólo si son coprimos
- Calcula $\tau(p^r)$ con p un primo. $\tau(p^r) = r + 1$
- Con lo anterior encuentra una fórmula para $\tau(n)$ a partir de la descomposición de n en factores primos.
  $n = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m} \Rightarrow \tau(n) = (r_1 + 1) \cdots (r_m + 1)$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.

Problema II: inciso

- Denotaremos por $\tau(n)$ al número de divisores de n.
- Denotaremos por $\iota(n)$ al número de divisores impares de n.

<u>Cuestiones:</u>

- ¿Es cierto que $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$? Sólo si son coprimos
- Calcula $\tau(p^r)$ con p un primo. $\tau(p^r) = r + 1$
- Con lo anterior encuentra una fórmula para $\tau(n)$ a partir de la descomposición de n en factores primos.
  $n = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m} \Rightarrow \tau(n) = (r_1 + 1) \cdots (r_m + 1)$
- Haz lo mismo para $\iota(n)$.

Problema II: solución

n	impar	múltiplo de 4
cuadrado	$\dfrac{\tau(n)+1}{2}$	$\dfrac{\tau(n)+1}{2} - \iota(n)$
no cuadrado	$\dfrac{\tau(n)}{2}$	$\dfrac{\tau(n)}{2} - \iota(n)$