



Taller de Talento Matemático
4º E.S.O.

ARITMÉTICA ARITMÉTICA
SIMÉTRICA SIMÉTRICA

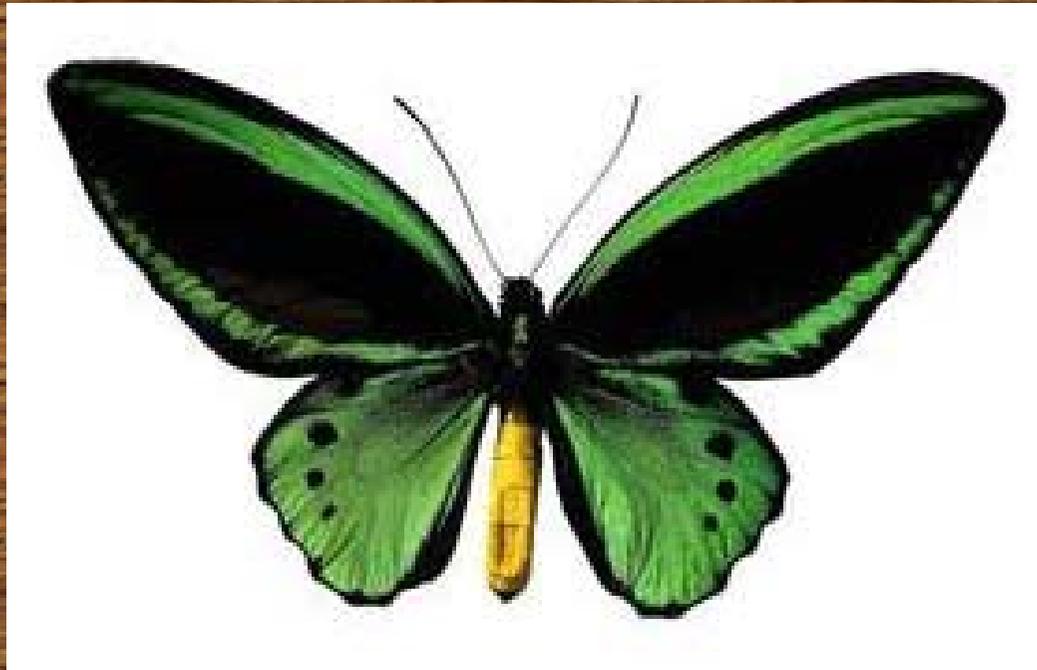
José María Muñoz Escolano

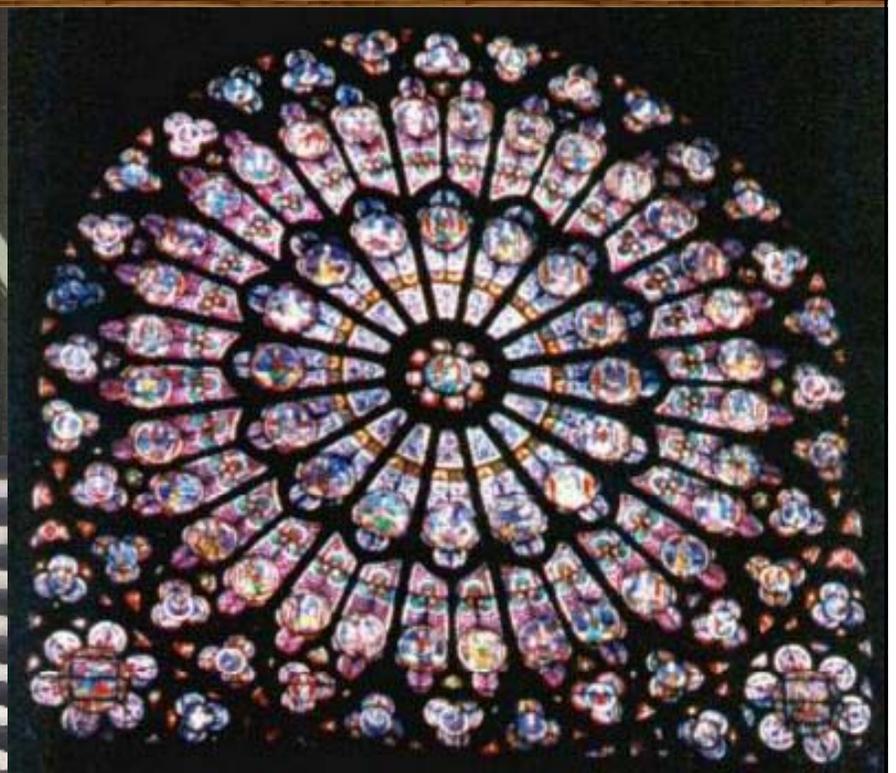
Antonio M. Oller Marcén

Zaragoza, 16 de diciembre de 2011

SIMETRÍAS

**EN LA NATURALEZA,
EN LOS OBJETOS,
EN LA CIUDAD,
EN EL ARTE ...**





Imágenes extraídas de la web: *Matemáticas en tu mundo* de José M^a Sorando

SIMETRÍAS

EN LAS PALABRAS (*palíndromos*)

oso

somos

reconocer

radar

soldadlos

EN LAS FRASES

¿acaso hubo búhos acá?

Adán no calla con nada

la ruta nos aportó otro paso natural

SIMETRÍAS EN LOS NÚMEROS

números capicúas

11, 55, 272, 80308, 456654, ...

¿Cuántos números capicúas existen?

Reformulamos la cuestión:

¿Cuántos capicúas de 2 cifras existen?

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99

9 números en total

SIMETRÍAS EN LOS NÚMEROS

¿Y de 3 cifras?

¿Y de 4 cifras?

¿Y de 5 cifras?

¿Y de 6 cifras?

Número de CIFRAS	Número de CAPICÚAS
2	9
3	90
4	90
5	900
6	900

SIMETRÍAS EN LOS NÚMEROS

¿Cuántos capicúas de n cifras existen?

Si n es par,

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{C_n} & \boxed{C_{n-1}} & \dots & \boxed{C_{(n/2)+1}} & \boxed{C_{n/2}} & \dots & \boxed{C_2} & \boxed{C_1} \\ 9 & 10 & \dots & 10 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array}$$

$$9 \cdot 10^{\frac{n}{2} - 1}$$

Si n es impar,

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{C_n} & \boxed{C_{n-1}} & \dots & \boxed{C_{k+1}} & \boxed{C_k} & \boxed{C_{k-1}} & \dots & \boxed{C_2} & \boxed{C_1} \\ 9 & 10 & \dots & 10 & 10 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array}$$

$$9 \cdot 10^{\frac{n-1}{2}}$$

SIMETRÍA

EN OPERACIONES ARITMÉTICAS

$$\begin{array}{r} 37 + 95 = 59 + 73 \\ 132 \qquad \qquad \qquad 132 \end{array}$$

¿Esto pasa siempre con cualquier par de números?

NO, por ejemplo: $36 + 94 = 130$ no es igual a $49 + 63 = 112$

Encontrar 10 ejemplos de pares de números (de dos cifras) en los que **SÍ** se cumple

SIMETRÍA EN LA SUMA

$$37 + 95 = 59 + 73$$

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla

$$\underline{ab} + \underline{cd} = \underline{dc} + \underline{ba}$$

a, b, c, d distintos de 0

$$ab = (10 \times a) + b$$

$$dc = (10 \times d) + c$$

$$cd = (10 \times c) + d$$

$$ba = (10 \times b) + a$$

$$(10a + b) + (10c + d) = (10d + c) + (10b + a)$$

$$9a + 9c = 9b + 9d$$

$$a + c = b + d$$

SIMETRÍA EN LA SUMA

$$37 + 95 = 59 + 73$$

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla

$$ab + cd = dc + ba$$

a, b, c, d distintos de 0, así que $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$a + c = b + d$$

Elige un número de dos cifras (que no tenga 0)

Calcula qué números se suman "simétricamente" con número elegido

¿Qué ocurre cuando uno de los números es capicúa?

SIMETRÍA EN LA MULTIPLICACIÓN

$$33 \times 44 = 44 \times 33$$

$$96 \times 23 = 32 \times 69$$

$$2208 \quad 2208$$

Encontrar otros pares de números (de dos cifras)
en los que se cumple también

Averiguar qué condiciones deben tener los pares
de números (de dos cifras) para que se cumpla

$$\underline{ab} \times \underline{cd} = \underline{dc} \times \underline{ba}$$

a, b, c, d distintos de 0, así que $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$ab = (10 \times a) + b$$

$$dc = (10 \times d) + c$$

$$cd = (10 \times c) + d$$

$$ba = (10 \times b) + a$$

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla

$$\mathbf{ab \times cd = dc \times ba}$$

a, b, c, d distintos de 0, así que $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$ab = (10 \times a) + b$$

$$dc = (10 \times d) + c$$

$$cd = (10 \times c) + d$$

$$ba = (10 \times b) + a$$

$$(10a + b) \times (10c + d) = (10d + c) \times (10b + a)$$

$$100ac + 10cb + 10ad + bd = 100bd + 10cb + 10ad + ac$$

$$99ac = 99bd$$

$$ac = bd$$

$$\mathbf{a \times c = b \times d}$$

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla

$$ab \times cd = dc \times ba$$

a, b, c, d distintos de 0, así que $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$a \times c = b \times d$$

Elige un número de dos cifras (que no tenga 0)

Calcula qué números se multiplican "simétricamente" con número elegido

Condiciones de los pares de números (de 2 cifras)
para la suma "simétrica"

$$ab + cd = dc + ba$$

a, b, c, d distintos de 0, así que $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$a + c = b + d$$

Condiciones de los pares de números (de 2 cifras)
para la multiplicación "simétrica"

$$ab \times cd = dc \times ba$$

a, b, c, d distintos de 0, así que $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$a \times c = b \times d$$

**Todos estos resultados
son válidos para
números de 2 cifras ...**

¿y para el resto?

Suma simétrica Núm. de 3 cifras

¿Cómo sería una suma simétrica con n° de 3 cifras?

Encuentra algún par de números
que sirvan como ejemplo

Averiguar qué condiciones deben tener los pares
de números (de tres cifras) para que se cumpla

$$\underbrace{abc} + \underbrace{def} = \underbrace{fed} + \underbrace{cba}$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$abc = 100xa + 10xb + c$$

$$def = 100xd + 10xe + f$$

$$fed = 100xf + 10xe + d$$

$$cba = 100xc + 10xb + a$$

$$100a + 10b + c + 100d + 10e + f = 100f + 10e + d + 100c + 10b + a$$

$$99a + 99d = 99f + 99c$$

$$a + d = c + f$$

Suma simétrica Núm. de 3 cifras

Condiciones de los pares de números (de 3 cifras)
para la suma "simétrica"

$$abc + def = fed + cba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a + d = c + f$$

Condiciones de los pares de números (de 2 cifras)
para la suma "simétrica"

$$ab + cd = dc + ba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a + c = b + d$$

Suma simétrica Núm. de 3 cifras

Condiciones de los pares de números (de 3 cifras)
para la suma "simétrica"

$$abc + def = fed + cba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a + d = c + f$$

Condiciones de los pares de números (de 2 cifras)
para la suma "simétrica"

$$ab + cd = dc + ba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a + c = b + d$$

Con distinto número de cifras: casos fáciles

Números de 1 cifra con
números de 2 cifras

Números de 1 cifra con
números de 3 cifras

Números de 1 cifra con
números de n cifras

Suma simétrica

Núm. de 3 cifras y núm. de 2 cifras

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de 3 y 2 cifras) para que se cumpla

$$\underbrace{abc} + \underbrace{de} = \underbrace{ed} + \underbrace{cba}$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$abc = 100xa + 10xb + c$$

$$ed = 10xe + d$$

$$de = 10xd + e$$

$$cba = 100xc + 10xb + a$$

$$100a + 10b + c + 10d + e = 10e + d + 100c + 10b + a$$

$$99a + 9d = 99c + 9e$$

$$11a + d = 11c + e \quad \text{¿y ahora qué?}$$

$$11a - 11c = e - d$$

$$11(a - c) = e - d$$

Suma simétrica

Núm. de 3 cifras y núm. de 2 cifras

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de 3 y 2 cifras) para que se cumpla

$$abc + de = ed + cba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$11(a - c) = e - d$$

¿ Qué valores puede tener $e-d$? $-8 \leq e - d \leq 8$

¿ Qué valores puede tener $11(a-c)$?

$11(a-c) \geq 11$ si $a-c$ es positivo

$11(a-c) \leq -11$ si $a-c$ es negativo

$11(a-c) = 0$ si $a-c = 0$

La igualdad solo puede ser cierta cuando

$$a-c = 0$$

$$e-d = 0$$

Suma simétrica

Núm. de 3 cifras y núm. de 2 cifras

Condiciones de los pares de números (de 3 y 2 cifras) para que se cumpla la suma simétrica

$$abc + de = ed + cba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a = c \quad \text{y} \quad e = d$$

abc es capicúa **de** es capicúa

La conjetura capicúa

Para obtener un número capicúa a partir de otro número se invierte el orden de sus cifras y se suman el número dado y el invertido. Este proceso se continúa las veces que sean necesarias hasta obtener un capicúa.

Por ejemplo: Partiendo del 78.

$$\begin{aligned}78 + 87 &= 165 \\165 + 561 &= 726 \\726 + 627 &= 1353 \\1353 + 3531 &= 4884 \\ &\text{CAPICÚA}\end{aligned}$$

La conjetura capicúa dice:

"Aplicando el proceso anterior a un número cualquiera, se obtiene capicúa en un número finito de pasos"

No se sabe todavía si es cierta o no
(por eso se llama conjetura)

Already a Palindrome	Four-Step Palindrome
One-Step Palindrome	Six-Step Palindrome
Two-Step Palindrome	Twenty-Four-Step Palindrome
Three-Step Palindrome	

89

$$89 + 98 = 187$$

$$187 + 781 = 968$$



8813200023188

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En los primeros **10.000** números,
solo **251** números no generan un
capicúa en menos de 23 pasos
(Gardner, 1979).

Los números Lychrel

Se llamarían así a aquellos números que no cumplirían la conjetura capicúa

Un *buen candidato* a ser n°. Lychrel: **196**

Con ayuda de un ordenador, Wade VanLandingham (2008) después de realizar **724.756.966 pasos** con el 196 no obtuvo ningún capicúa.

El último número que alcanzó tenía

300 millones de cifras

Si se establecen los márgenes de 0,8 cm. en cada folio, entonces se necesitan más de **50.420 páginas** para imprimirlo.

Suponiendo una velocidad de impresión de 16 páginas por minuto, se necesitarían más de **52 horas y media** para imprimirlo.

Muchas gracias
por vuestra atención