PROBLEMAS DE AJEDREZ Y MATEMÁTICAS

PROBLEMAS SOBRE LA LEYENDA DEL AJEDREZ

Es conocida la leyenda del origen del ajedrez: Erase una vez un rey aburrido, que ofrece, al que inventase un juego que le agradara, todo lo que este quisiese. El inventor le dijo al Rey que, como forma de pago, él quería tener suficiente trigo como para poner en la primera casilla un grano, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta y así sucesivamente, duplicando la cantidad de la casilla anterior hasta llegar al último de los escaques. El Rey ordenó inmediatamente que se hiciera el pago, llamó al matemático de la corte para que calculara el número de granos que debía entregar y este después de hacer los cálculos correspondientes le dijo a su Rey: "Su Majestad, el número total de granos es:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63} = 2^{64} - 1 = \mathbf{18.446.744.073.709.551.615}$$

y en todo el reino no hay suficiente trigo ni lo habrá con muchos siglos de cosechas, para satisfacer el pago".

Para hacernos una idea de la inmensidad de esta cifra gigante, calcularemos aproximadamente la magnitud del granero capaz de almacenar semejante cantidad de trigo. Un metro cúbico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos. En ese caso, la recompensa del inventor del ajedrez deberá ocupar un volumen aproximado de 12 000 000 000 000 m^3, o lo que es lo mismo, 12 000 km^3. Para efectuar el pago, el Rey debería llenar de trigo un cubo de 7 km de arista. (Si el granero tuviera 4 m de alto y 10 m de ancho, su longitud habría de ser de 300 000 000 km, o sea, el doble de la distancia que separa la Tierra del Sol).

EJERCICIO 1: ¿Cuál es la cifra de las unidades del número de la última casilla? ¿Y la cifra de las unidades de la suma de todos los números correspondientes a todas las casillas?

El rey, de haber estado fuerte en matemáticas, hubiera podido librarse de esta deuda tan gravosa, pues se hubiese dado cuenta de la magnitud de granos de trigo que se le pedía o también para dar una lección al listo pero taimado inventor, le habría bastado simplemente proponerle al inventor que contara, grano a grano, el trigo que le correspondía.

Efectivamente, si, se hubiese puesto a contar, trabajando noche y día, contando a razón de un grano por segundo, habría contado en el primer día 86 400 granos. Para contar un millón de granos hubiera necesitado, como mínimo, diez días de trabajo. Un metro cúbico de trigo lo hubiera contado aproximadamente en medio año. Por consiguiente, aunque el inventor hubiera consagrado el resto de su vida a contar los granos de trigo que le correspondían, habría recibido sólo una parte ínfima de la recompensa exigida.

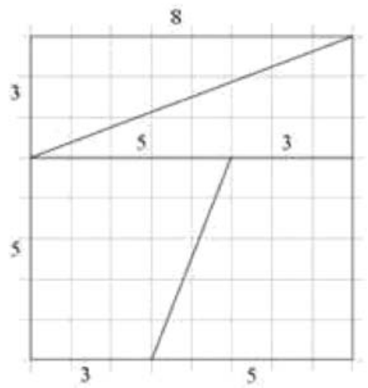
Otra versión, menos conocida de la leyenda es la forma en que el matemático de la corte, viendo en problemas de honor a su Rey, le salvo de esta situación. Éste le propuso al inventor que le pagarían lo que él pedía pero además, lo que se obtuviera de agregar sin fin, más y más casillas al tablero. El inventor aceptó esta nueva forma de pago, ya que sin duda obtendría una mayor cantidad de trigo, pero cuando hicieron los cálculos para ver la cantidad T de granos, se obtuvo que:

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots.$$
$$T = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots.)$$
$$T = 1 + 2T$$

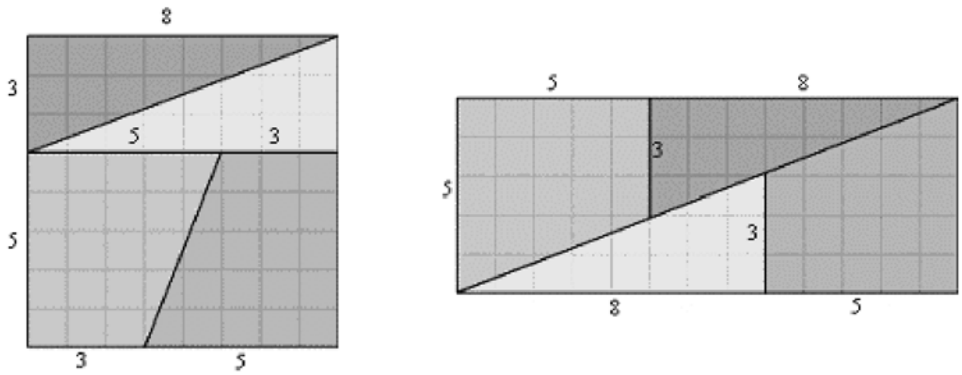
y resolviendo la última ecuación obtenemos que $T = -1$. Por tanto la generosidad *infinita* del rey se ve recompensada; no solamente no debe pagar nada al inventor, sino que éste le debe entregar un grano de trigo.

PROBLEMAS CON EL TABLERO

Una paradoja fascinante que parece demostrar que 64 es igual a 65 aparece al cortar el tablero de ajedrez en cuatro piezas y ensamblarlas en un rectángulo cuyos lados tienen 5 y 13 casillas respectivamente



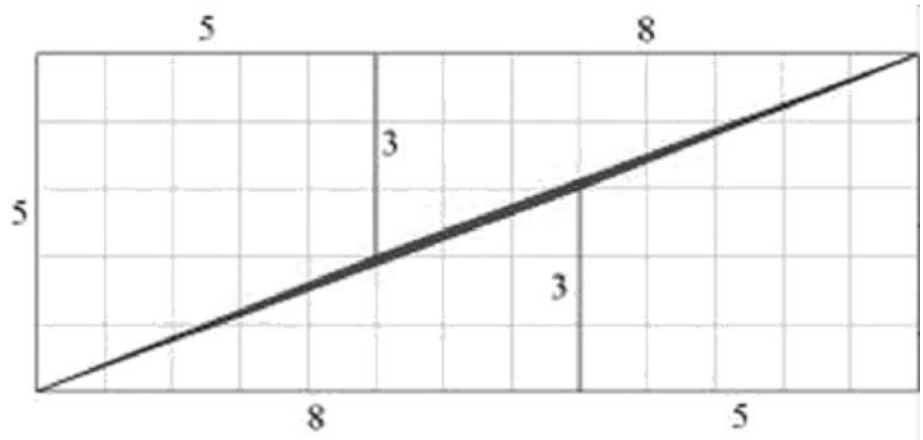
Con tres cortes directos, el tablero de ajedrez ha sido diseccionado en dos triángulos iguales y en dos trapezoides iguales. La suma de las áreas de esas 4 piezas es de 64 casillas cuadradas. Esas cuatro figuras geométricas diseccionadas del tablero pueden ahora ensamblarse para que formen el siguiente rectángulo:



Los lados del rectángulo resultante constan de 5 y (8+5) = 13 casillas, por lo que el área del rectángulo es de 5 x 13 = 65 casillas cuadradas. Son las mismas cuatro piezas recortadas del tablero de ajedrez, solo que dispuestas de forma diferente, por lo que el área total debería ser la misma.

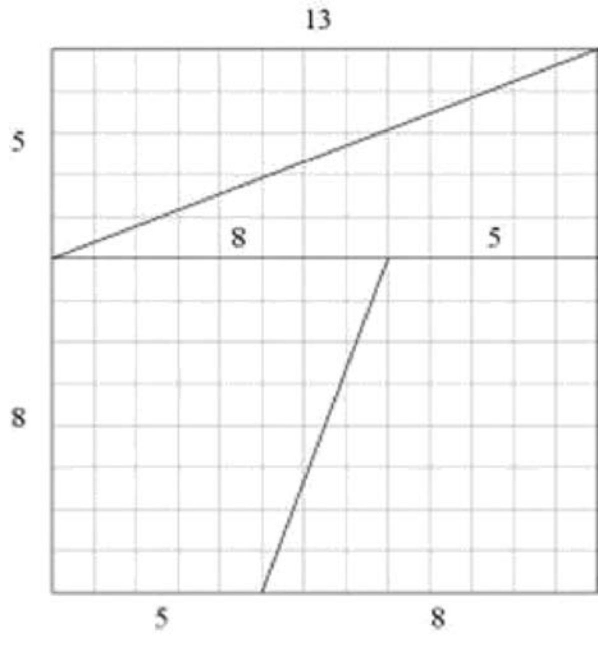
Por lo tanto parece que hemos probado que ¡64 = 65!

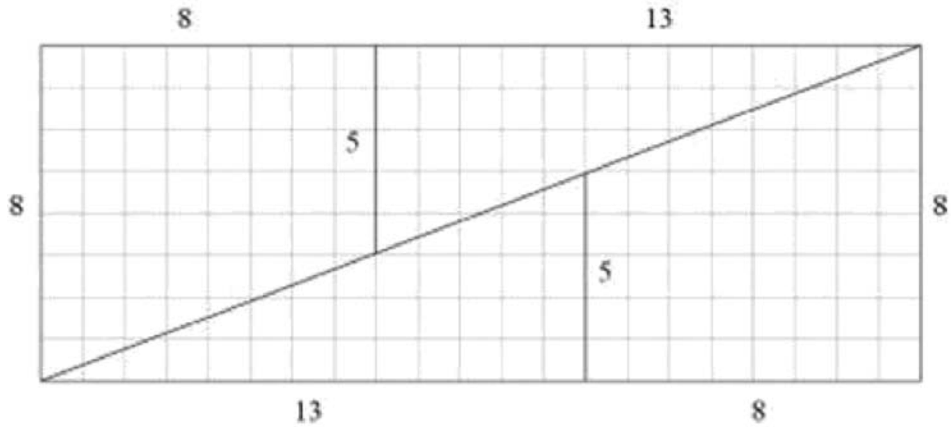
Lo que subyace como clave de esta aparente paradoja son las inexactitudes al dibujar las líneas de forman los triángulos y los trapecios y, con ello, el rectángulo. Presentado con una resolución mayor, el diagrama anterior sería algo como:



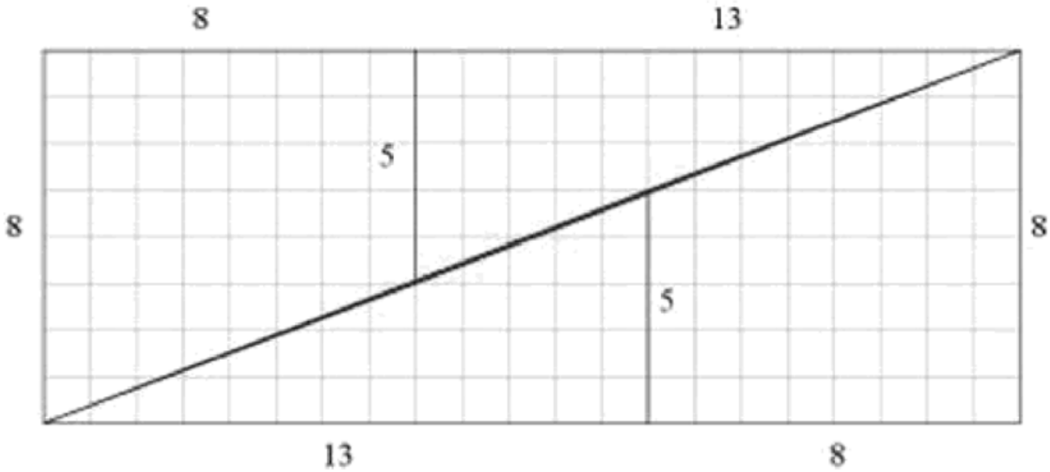
El área resaltada en rojo en el diagrama anterior tiene la forma de un paralelogramo muy largo. Es el responsable de la diferencia de área entre el cuadrado y el rectángulo.

Una paradoja similar se puede construir al cortar un cuadrado de 13x13 casillas y reagrupar los dos triángulos y los dos trapecios que resultan en un rectángulo de 21x8, tal y como se hizo antes:





De nuevo, con mayor resolución tenemos:



El área pintada en rojo es de nuevo un paralelogramo de área 1 en el que esta vez se solapan las partes superior e inferior. Por lo tanto en este caso, el rectángulo resultante tiene un área menor (=168) que el cuadrado original (=169) debido al solapamiento.

¿Cuál es la base matemática de esta paradoja? Para explicarla en términos generales, comenzaremos recordando la serie de los llamados números de Fibonacci (F_n): Es una serie numérica en la que cada número F_{n+1} se define como la suma de los dos inmediatos anteriores F_n y F_{n-1}. Por lo tanto:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Los valores iniciales son $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Así, los primeros valores de la serie de Fibonacci son: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,…

La "paradoja" de la disección parece decir que

$$F_n \cdot F_n \quad \text{es igual a } F_{n+1} \cdot F_{n-1}$$

Hagamos unos sencillos cálculos para ver lo que pasa:

$$F_n \cdot F_n = F_n \cdot (F_{n-1} + F_{n-2}) = F_n \cdot F_{n-1} + F_n \cdot F_{n-2};$$

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (F_n + F_{n-1}) \cdot F_{n-1} = F_n \cdot F_{n-1} + F_{n-1} \cdot F_{n-1}$$

La diferencia D_n entre esos dos productos es:

$D_n = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n \cdot F_n = F_{n-1} \cdot F_{n-1} - F_n \cdot F_{n-2} = -D_{n-1} = (-1)^2 D_{n-2} = ... = (-1)^{n-1} D_1 =$

$(-1)^n$; puesto que $D_1 = F_2 \cdot F_0 - F_1 \cdot F_1 = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$.

Por lo tanto hemos establecido la veracidad de lo que se conoce como **identidad de Cassini:**

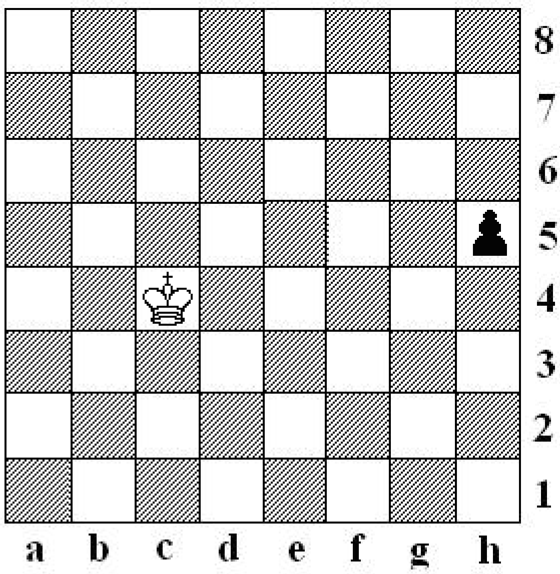
$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n \cdot F_n = (-1)^n$$

La conclusión es que siempre se pueden reorganizar un cuadrado F_n x F_n en un rectángulo F_{n+1} x F_{n-1} y que la diferencia entre sus áreas, es decir $F_n \cdot F_n$ y $F_{n+1} \cdot F_{n-1}$, es $(-1)^n$, es decir bien −1 o bien +1. En el primer caso se tiene un solapamiento entre las piezas. En el segundo caso, hay un hueco entre ellas.

EJERCICIO 2: Es muy clásico el siguiente: ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez? Y, ¿Cuántos rectángulos de cualquier tamaño?

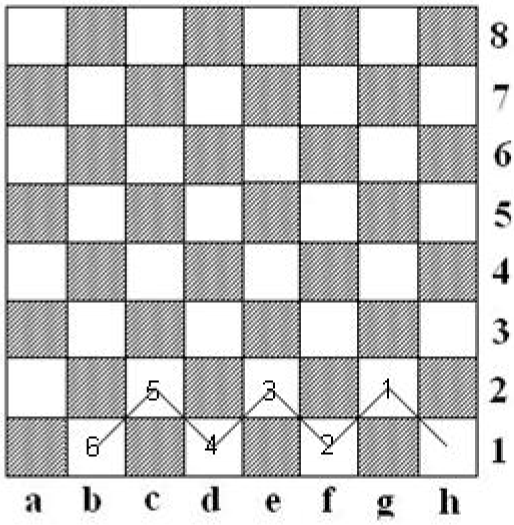
La geometría del tablero y las reglas del juego hacen que un rey colocado en una esquina tarde lo mismo, en ir hasta la casilla más lejana en horizontal, en vertical y en diagonal. Esta circunstancia especial hace posible que en Ajedrez no se cumpla la regla de la geometría euclidiana de que la línea recta es el camino más corto para ir de un punto a otro. Para verlo proponemos los siguientes ejercicios:

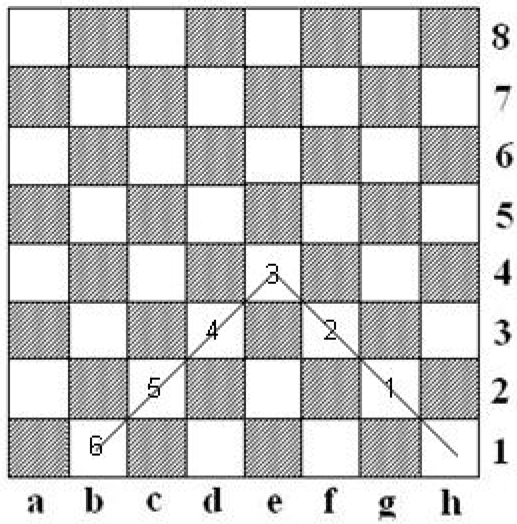
EJERCICIO 3: Jugando primero las blancas ¿Podrá el rey blanco alcanzar el peón negro?



EJERCICIO 4: Si el peón negro está en h5, y mueven las blancas, ¿en qué casillas del tablero el rey alcanza al peón negro?

Imaginemos ahora que el rey quiere ir de la casilla b1 a la h1, puede hacerlo de varias maneras con trayectos de la misma longitud (6 movimientos) pero no todos son líneas rectas por ejemplo:
I: 1.De b1 a c1; 2. De c1 a d1; 3. De d1 a e1; 4. De e1 a f1; 5. De f1 a g1; 6. De g1 a h1
II: 1.De b1 a c2; 2: De c2 a d1; 3. De d1 a e2; 4. De e2 a f1; 5. De f1 a g2; 6. De g2 a h1
III: 1.De b1 a c2; 2: De c2 a d3; 3. De d3 a e4; 4. De e4 a f3; 5. De f3 a g2; 6. De g2 a h1





Situaciones como esta del ajedrez dieron lugar a una nueva geometría no euclídea (**geometría del taxi**)

PROBLEMAS SOBRE PARTIDAS

El ajedrez es una fuente de problemas muy interesantes. Por ejemplo los siguientes son problemas que involucran el juego del ajedrez:

EJERCICIO 5: En un torneo de ajedrez participaron 30 concursantes que fueron divididos, de acuerdo con su categoría, en dos grupos. En cada grupo los participantes jugaron una partida contra todos los demás. En total se jugaron 87 partidas más en el segundo grupo que en el primero. El ganador del primer grupo no perdió ninguna partida y totalizó 7´5 puntos. ¿En cuántas partidas hizo tablas el ganador? (La partida ganada supone un punto, la empatada, es decir, hacer tablas, medio y cero puntos la partida perdida)

EJERCICIO 6: En un torneo de ajedrez se jugó por el sistema todos contra todos solamente una vez. La suma de los puntos obtenidos por todos los jugadores, excepto un determinado jugador X, fue de 100 puntos. ¿Cuántos partidas ganó ese jugador desconocido X, si empató un número de partidas que es múltiplo de 3?

EJERCICIO 7: En un campeonato de ajedrez, cada jugador debe enfrentarse con todos los demás. Pero las obligaciones internacionales de los jugadores son tales que muchas confrontaciones han sido adelantadas o retrasadas. En el momento en que leéis estas líneas, los jugadores han jugado números muy distintos de partidas, lo que hace que la clasificación sea poco significativa. ¿Es posible que todos los jugadores hayan jugado un número diferente de partidas?

El siguiente problema no parece tener ninguna relación con el ajedrez, pero sin embargo, la tiene, como veremos en la solución:

EJERCICIO 8: (Olimpíada Húngara de Matemática del año 1926) "Pruebe que, si a y b son enteros dados, el sistema de ecuaciones:

$$x + y + 2z + 2t = a$$
$$2x - 2y + z - t = b$$

tiene soluciones enteras para x, y, z y t".

Es importante para seguir el desarrollo de una partida conocer las notaciones de las posiciones de las fichas y de las jugadas, que se utilizan en el ajedrez. El sistema de **notación algebraica** es una forma de representar la secuencia de movimientos de una partida de ajedrez. Desde 1997 es el único sistema de notación oficial en ajedrez. Cada una de las sesenta y cuatro casillas de un tablero de ajedrez es identificada con dos caracteres de manera única. El primer carácter identifica la columna de la casilla, y se representa por una de las siguientes letras minúsculas **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g** y **h**, ordenadas desde la izquierda del jugador con piezas blancas hasta su derecha. El segundo carácter de una casilla identifica su línea (fila) y se representa por un número del 1 al 8, en orden ascendente, desde el lado del jugador de piezas blancas hasta el lado del jugador de piezas negras. Cada pieza tiene una letra mayúscula asociada, y varía en función del idioma del anotador, en Español se utilizan **R, D, T, A** y **C**, respectivamente, para el rey, la dama, la torre, el alfil y el caballo. Los peones no tienen asociados ninguna letra.

Un movimiento básico se escribe con la letra de la pieza que se mueve (omitiéndose para los peones), seguido de la identificación de la casilla destino. Un movimiento de captura se representa con la letra **x** inmediatamente antes de la casilla destino; la captura por parte de un peón incluye, antes del carácter **x**, la letra de la columna de la casilla de origen.

PROBLEMAS DE RECORRIDOS POR EL TABLERO

Leonard Euler, planteó y resolvió el "**problema del movimiento del caballo**" que dice así: Recorrer con el caballo todas las casillas del tablero sin pasar dos veces por ninguna de ellas.

Se da la circunstancia de que este problema está relacionado con otro problema que ha apasionado a matemáticos y no matemáticos, que es el de la construcción de *cuadrados mágicos*. Pues bien, Euler logró dar una solución simultánea a ambos problemas, en donde cada fila y cada columna del tablero suma 260, cada fila y columna de cada uno de los cuatro subcuadrados de orden 4 suman 130 y tal que en este "tablero mágico" de orden 8 se describe la ruta del movimiento del caballo por todo el tablero.

1	48	31	50	33	16	63	18	8
30	51	46	3	62	19	14	35	7
47	2	49	32	15	34	17	64	6
52	29	4	45	20	61	36	13	5
5	44	25	56	9	40	21	60	4
28	53	8	41	24	57	12	37	3
43	6	55	26	39	10	59	22	2
54	27	42	7	58	23	38	11	1
a	b	c	d	e	f	g	h	

EJERCICIO 9: En un tablero tenemos una torre colocada en **a1** ¿Encuentra un camino que pueda seguir la torre para llegar a **h1**? ¿Y si la posición inicial de la torre es en **c5**? ¿Y si es **a8** la inicial? (en todos los casos queremos llegar a **h1** pasando por todas las casillas del tablero una sola vez)

EJERCICIO 10: ¿De cuántas maneras un rey puede pasar por todos los escaques del tablero sin pasar dos veces por una misma casilla? (Por ejemplo el Rey está en **e8**)

PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE PIEZAS

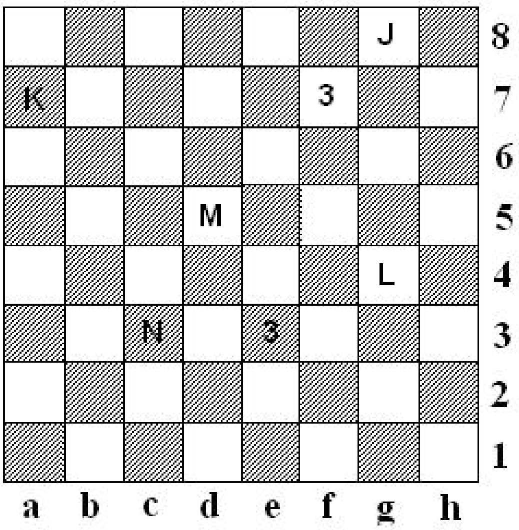
El siguiente ejercicio consistirá en encontrar la mínima cantidad de piezas del mismo tipo, de manera que amenacen todas las casillas libres del tablero, y el de encontrar el número máximo de piezas del mismo tipo que se pueden colocar sin que se ataquen entre ellas.

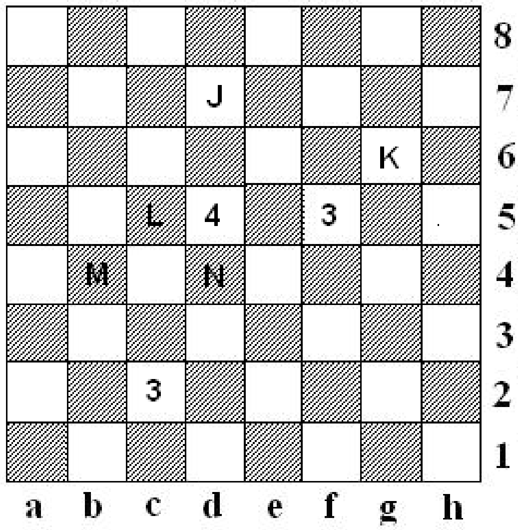
EJERCICIO 11: Resolver los problemas de máximo y mínimo anteriores para las siguientes piezas: **Rey**; **Torre**; **Alfil**; **Dama** y **Caballo**. (El gran matemático alemán Carl F. Gauss, se interesó por el "problema máximo de las 8 damas" y descubrió solamente 72 soluciones, en realidad todas estas soluciones se obtienen de 12 ubicaciones básicas, por rotaciones y reflexiones).

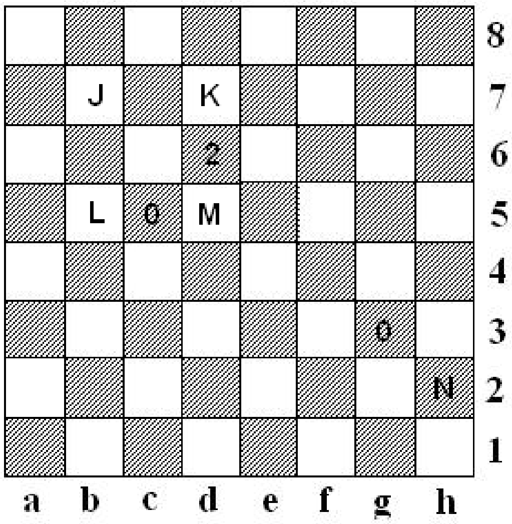
EJERCICIO 12: Colocar sobre un tablero la mayor cantidad posible de piezas de ajedrez de forma tal que todas ataquen la misma cantidad de casillas libres (al menos a una)

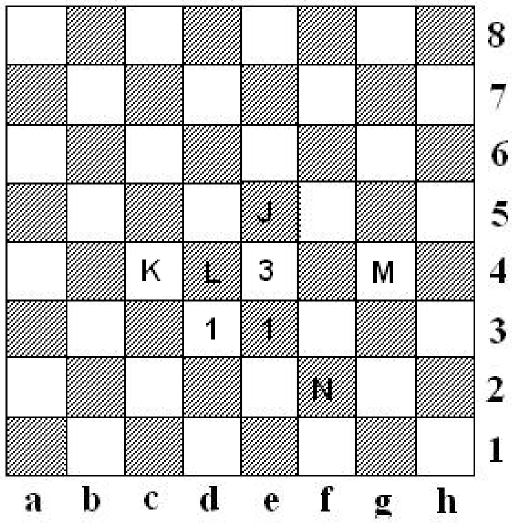
PROBLEMAS CON LAS PIEZAS

EJERCICIO 13: En los cuatro tableros siguientes, las letras **J**, **K**, **L**, **M** y **N** representan un rey, una dama, una torre, un alfil y un caballo de ajedrez aunque no necesariamente en ese orden. Los números arábigos indican cuántas de esas piezas amenazan esa casilla. Se trata de descubrir qué pieza representa cada letra.

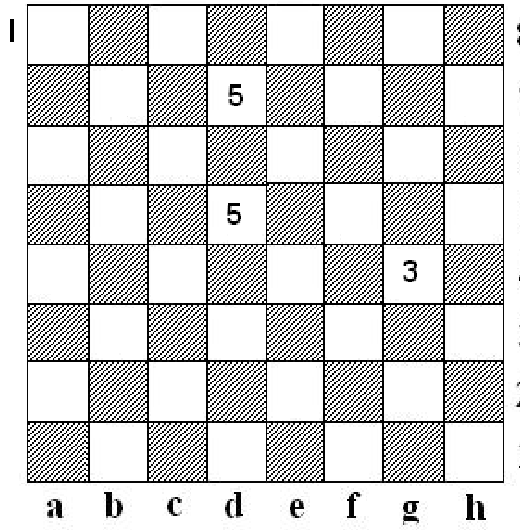
I


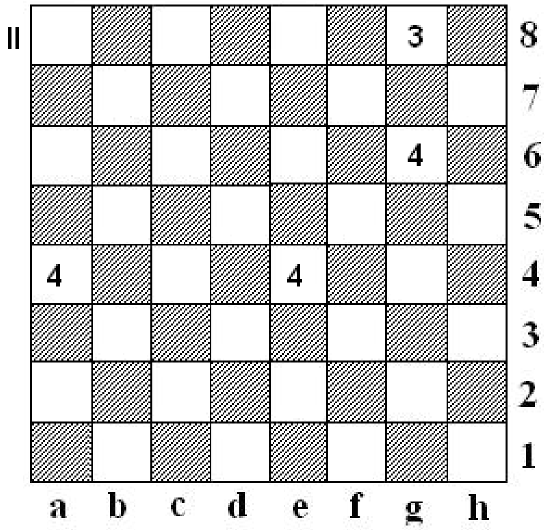
II


III


IV


EJERCICIO 14: Sobre un tablero se han colocado cinco piezas de ajedrez: un Rey, una Dama, una Torre, un Alfil y un Caballo, pero no sabemos dónde. Solo se ven en los tableros unos números que indican la cantidad de piezas que atacan esa casilla. Indicar para cada tablero la ubicación de las cinco piezas





PROBLEMAS DE PARTIDAS

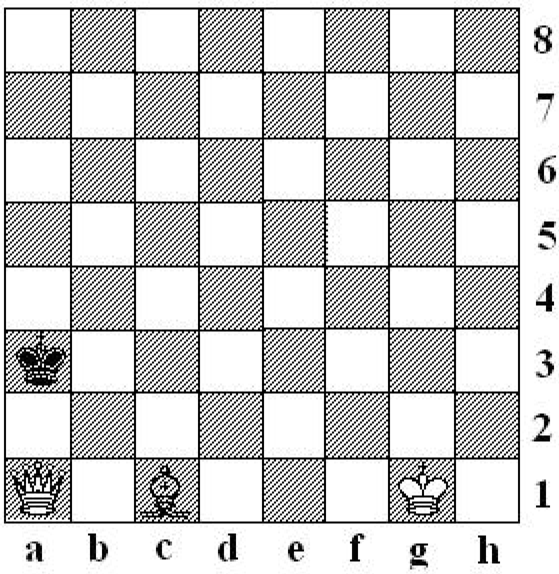
EJERCICIO 15: **Ajedrez extravagante.** Al visitar, hace poco, un club ajedrecístico tuve ocasión de observar el desarrollo de una partida entre los señores Blanco y Negro, los dos jugadores del club que más se distinguían por la extravagancia de sus partidas. Para sorpresa mía, el tablero mostraba la posición de la Figura 1.

Figura 1. *Situación de las piezas tras la cuarta jugada de las negras*

Pensé enseguida que cada jugador había empezado la partida sin su caballo de rey, y que las primeras en mover habían sido las negras. El señor Negro me explicó entonces que acababa de realizar su cuarta jugada, en una partida ajustada a las reglas ordinarias. ¿Podrías reconstruir una partida que produzca tan curiosa situación inicial, valiéndose tan sólo, claro está, de jugadas lícitas?

Una hora más tarde, tras perder una partida frente a otro jugador, volví a echar un vistazo al tablero de Blanco y Negro. En su segunda partida, el tablero tenía exactamente el mismo aspecto que antes, salvo que ahora faltaban *todos* los caballos. El señor Negro, que acababa de mover una pieza negra, alzó la vista del tablero y dijo: «Acabo de realizar mí *quinta* jugada». ¿Sabrías construir una partida que produzca tan curiosa situación inicial, valiéndose, como antes, tan sólo, de jugadas lícitas?

EJERCICO 16: Problema de retroanálisis. ¿Cuál fue la última jugada de las blancas?



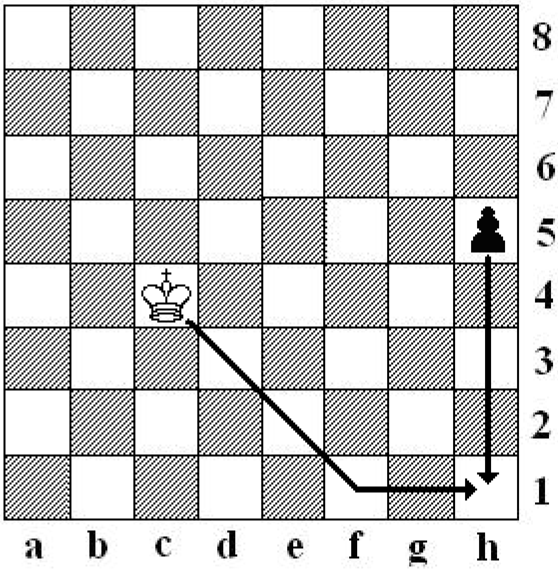
(La novela *La tabla de Flandes*, de Arturo Pérez-Reverte basa su trama en un problema de ajedrez retrospectivo pintado en un cuadro).

SOLUCIONES:

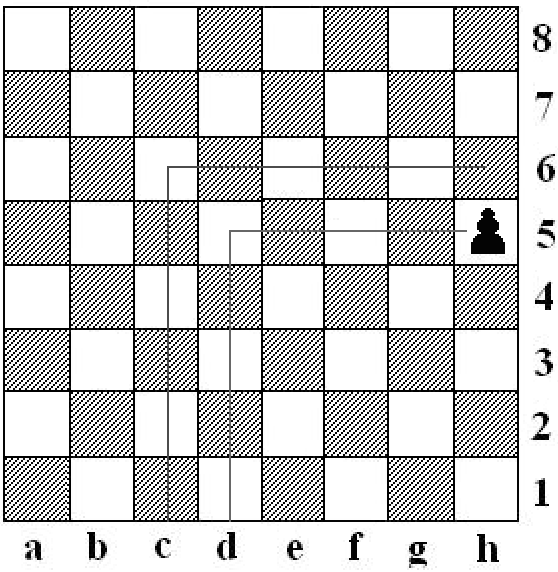
EJERCICIO 1: La cifra de las unidades de las sucesivas potencias de 2 se repiten periódicamente (periodo 4) 8 y 5 respectivamente

EJERCICIO 2: Basta con un conteo sistemático. Hay 204 cuadrados. En cuanto al número de rectángulos i x j (i ≠ j) salen 1092.

EJERCICIO 3: El rey blanco emplea cinco movimientos en llegar a h1, mientras que el peón negro cuatro



EJERCICIO 4: El rey captura al peón si esta dentro del cuadrado de vértices d5; h5; h1; d1. La longitud del lado del cuadrado es igual al número de filas que le falta al peón para coronar, incluida la fila en la que está el peón. Si el rey enemigo está dentro de ese cuadrado llega a capturar al peón, si está fuera no. (**Regla del cuadrado**). En nuestro caso jugando primero las blancas el rey puede encontrarse en el cuadro de vértices: c6; h6; h1; c1.



EJERCICIO 5: 7 partidas

EJERCICIO 6: Emplearemos para resolverlo el método científico **(ensayo y error).** En cada partida se consigue un punto entre los dos jugadores. Habrá en total tantos puntos como partidas.
Con 2 jugadores el total de puntos es $C_{2,2}$=1.
Con 3 jugadores el total de puntos es $C_{3,2}$=3.
Con 4 jugadores el total de puntos es $C_{4,2}$=6.
Con 5 jugadores el total de puntos es $C_{5,2}$=10.
Con n jugadores el total de puntos es $C_{n,2}$=n(n-1)/2.
Con 14 jugadores el total de puntos es $C_{14,2}$=91.
Con 15 jugadores el total de puntos es $C_{15,2}$=105.
Con 16 jugadores el total de puntos es $C_{16,2}$=120.
Si faltan los puntos del jugador X no es posible este último caso. El único posible es el de 15 jugadores. Así, pues, 105 − 100 = 5. Luego, el jugador desconocido X obtuvo 5 puntos. Llamando g, p y e al número de partidas ganadas, perdidas y empatadas se obtiene la ecuación diofántica: $g+14 – (g + p)\cdot 0{,}5 = 5$ que tiene por soluciones: g = 1, p = 5, e = 8; g = 2, p = 6, e = 6; g = 3, p = 7, e = 4; g = 4, p = 8, e = 2; g = 5, p = 9, e = 0. Por lo que ganó 2 partidas.
EJERCICIO 7: Como hay n jugadores, cada jugador podría haber jugado con los otros n – 1 jugadores. A cada jugador le hacemos corresponder un número entre 1 y n – 1 (o entre 0 y n – 2, pues si un jugador no ha jugado ninguna partida, el que más partidas ha jugado tendría como máximo n – 1 ó n – 2 partidas jugadas) y al tener que asignar n números, tantos como jugadores, entre esos dos necesariamente por lo menos hay dos iguales. (**Principio del palomar de Dirichlet**)
EJERCICIO 8: Con un poco de ayuda del álgebra se obtienen las soluciones:

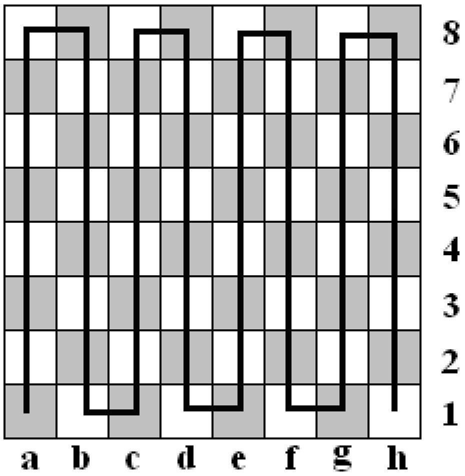
$$x = a – b,\ y = – b,\ z = – a + b,\ \ t = a,$$

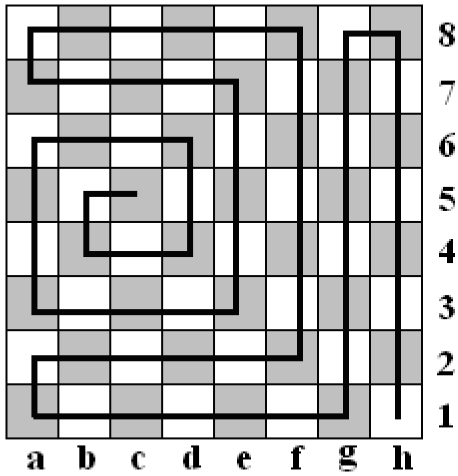
que se pueden verificar por simple sustitución. Más que la solución, nos interesa ver de dónde nace este problema. Suponga que se tiene un tablero infinito de ajedrez, como el del desesperado Rey, sobre este tablero sobreponemos un plano cartesiano de manera que cada par ordenado (a, b), con a y b enteros, se encuentre en el centro de cada escaque. Si llamamos a (0, 0) como el origen del sistema podemos ver que los 8 movimientos posibles del caballo, a partir del origen, se pueden representar por:

$u_1 = (1, 2)$ $\quad u_2 = (1, – 2)$ $\quad u_3 = (2, 1)$ $\quad u_4 = (2, – 1)$

$– u_1 = (– 1, – 2)$ $\quad – u_2 = (– 1, 2)$ $\quad – u_3 = (– 2, – 1)$ $\quad – u_4 = (– 2, 1)$

donde u_i y $– u_i$ son opuestos en el sentido de que movemos y retrocedemos, aplicados sucesivamente volvemos de nuevo al origen. En este sentido, efectuar x veces el movimiento u_1 se representa por (x, $2x$), efectuar y veces el movimiento u_2 se representa por (y, – $2y$), efectuar z veces el movimiento u_3 se representa por ($2z$, z) y efectuar t veces el movimiento u_4 se representa por ($2t$, – t), así al efectuar todos los movimientos juntos se obtiene de la suma vectorial y se puede representar como $(x + y + 2z + 2t,\ 2x – 2y + z – t)$ y las soluciones del sistema de ecuaciones, describen los movimientos para llegar con el caballo al escaque (a, b), es decir se prueba que el caballo puede visitar todas las casillas del tablero y da su recorrido.
EJERCICIO 9: Damos unos ejemplos gráficos de una de las múltiples soluciones de los dos primeros apartados

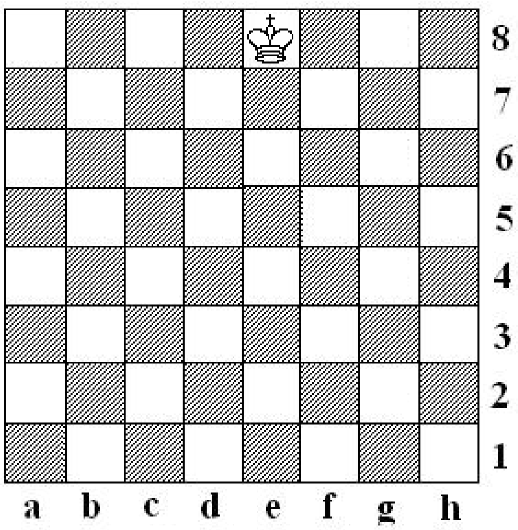




El tercer apartado es un caso particular de un problema más general que preguntaría si es posible ir con una torre en un tablero de ajedrez de una casilla colocada en la posición X a otra colocada en la posición Y. La solución es que si X e Y son del mismo color, por ejemplo blanco (tercer apartado), el paseo es imposible ya que la torre va recorriendo sucesivamente casillas de color blanco, negro, blanco, negro,... Así si el paseo terminase en blanco, el número de casillas sería impar

EJERCICIO 10: Hay muchos caminos, pero como curiosidad final, veamos un recorrido ideado por I. Ghersi, en el cual los números de cada casilla que definen el orden del recorrido forman un cuadrado mágico. Los ocho números colocados en las casillas de todas las filas, de todas las columnas y de las dos diagonales mayores, dan siempre **la misma suma: 260**. Un hermoso camino

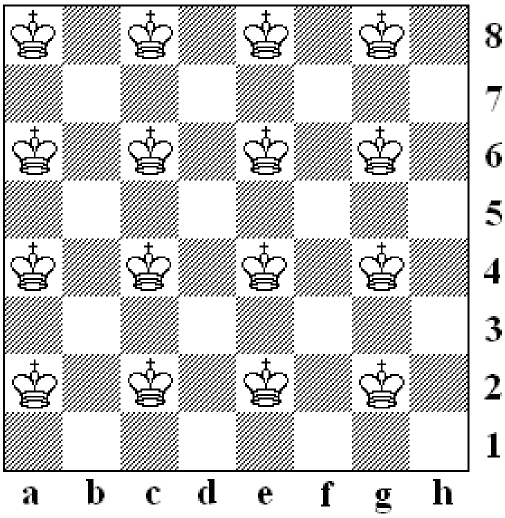
.

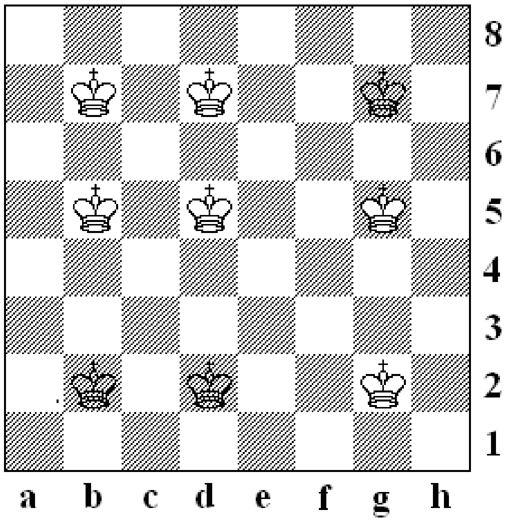


61	62	63	64	1	2	3	4	8
60	11	58	57	8	7	54	5	7
12	59	10	9	56	55	6	53	6
13	14	15	16	49	50	51	52	5
20	19	18	17	48	47	46	45	4
21	38	23	24	41	42	27	44	3
37	22	39	40	25	26	43	28	2
36	35	34	33	32	31	30	29	1
a	b	c	d	e	f	g	h	

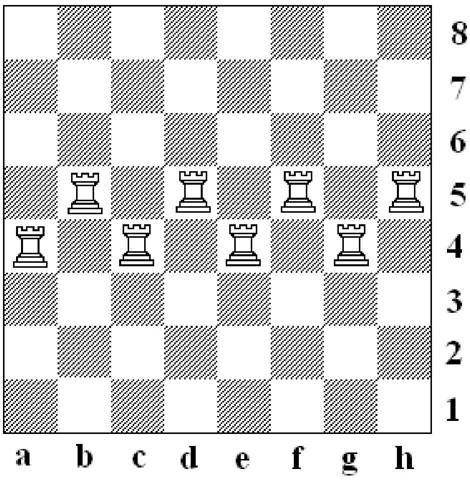
EJERCICIO 11:

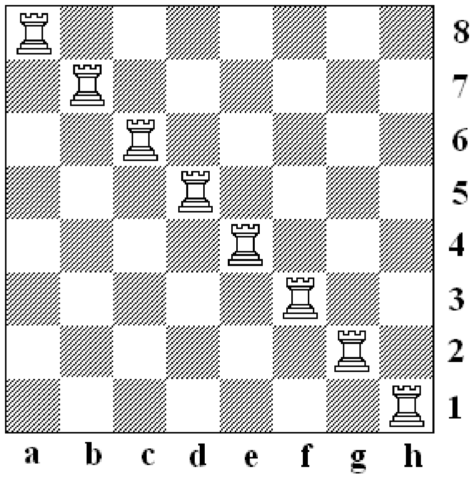
Rey. Se pueden colocar como máximo 16 reyes sin que se amenacen. Para el problema de mínimos bastan 9.



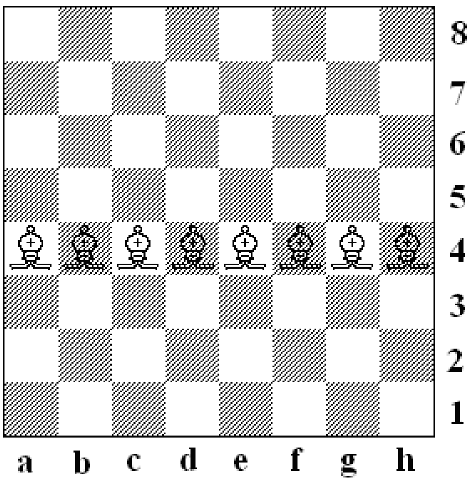


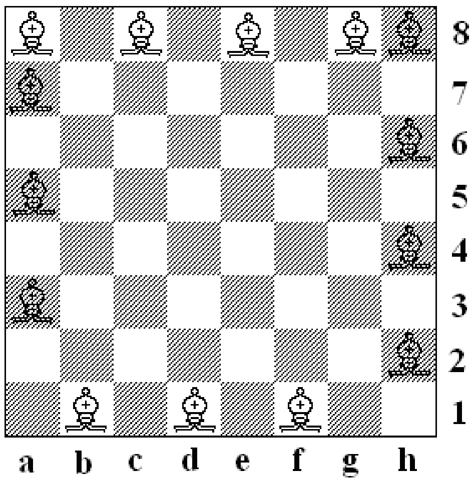
Torre. Para el caso de la torre el problema máximo coincide con el mínimo. En el tablero de ajedrez se necesitan, por lo menos 8 torres para cubrir los 64 escaques, y no se podrán poner más de 8 torres sin que se ataquen entre ellas.



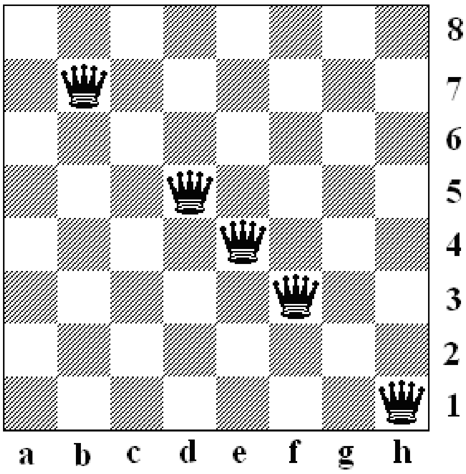


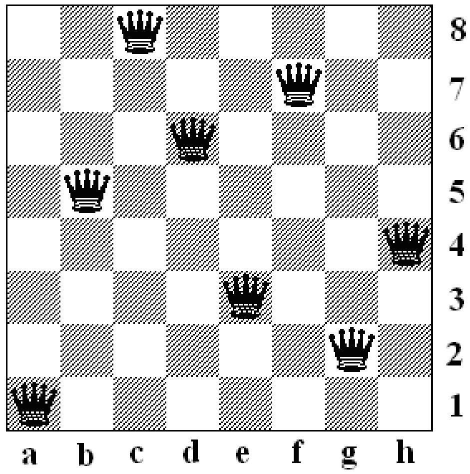
Alfil. En el problema de cuántos alfiles cubren todo el tablero la solución es 8. Mientras que el mayor número de estas piezas que pueden ponerse sin que se amenacen unos a otros es 14



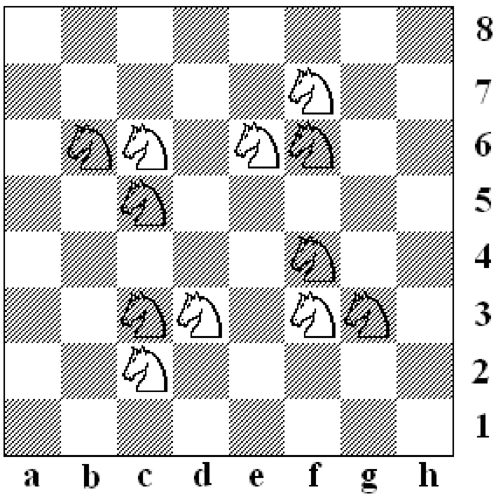


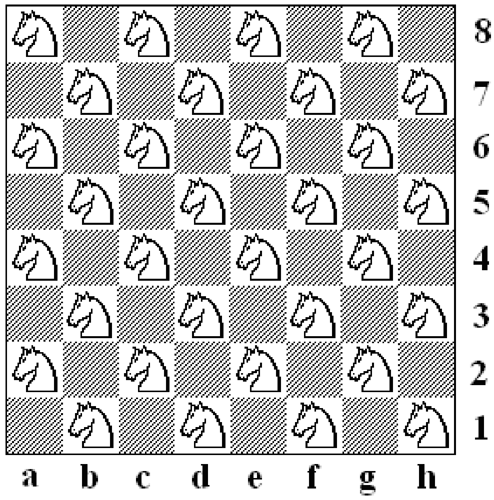
Dama. En el problema del mínimo número de damas que cubren todo el tablero es 5. (Hay 4860 soluciones diferentes, 61 simétricas y 577 no simétricas). Mientras que para el problema máximo es 8 el número de damas



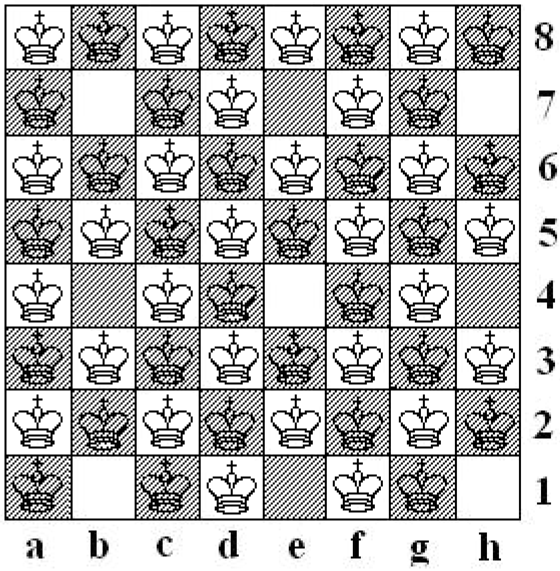


Caballo. Con respecto al caballo su modo de moverse hace que la solución del problema mínimo sea totalmente distinta de la del problema máximo. En las figuras siguientes vemos que 12 caballos son necesarios y suficientes para abarcar todas las casillas del tablero, para el problema máximo, se pueden colocar 32 caballos en casillas de un color sin atacarse unos a otros. (Se ve claramente que sólo hay dos soluciones: una en los escaques blancos y otra en los negros)





EJERCICIO 12: 55 reyes atacando una casilla libre cada uno.



EJERCICIO 13:
I: **K** dama, **J** rey, **M** alfil, **N** torre y **L** caballo
II: **M** caballo, **L** torre, **K** alfil, **J** dama y **N** rey.
III: **J** rey, **K** torre, **L** alfil, **M** dama y **N** caballo.
IV: **N**: torre, **M** alfil, **L** caballo, **K** rey y **J** dama.
EJERCICIO 14: En el primer caso una puede ser: Rey **c6**; Dama **d1**; Torre **d8**; Alfil **e6**; y Caballo **f6**. (Otra solución: Rey **e6**; Alfil **c6**; Caballo **f6**; Dama **f5** y Torre **d4**). Para el segundo problema: Rey **h7**; Dama **e8**; Torre **g4**; Alfil **c2** y Caballo **c5**
EJERCICIO 15: Un posible desarrollo de la primera partida sería: 1. Cf3; d5 2. Ce5; Cf6 3. Cc6; Cd7 4. Cxb1; Cb1. Para la segunda podría ser: 1. Cf3; Cc6 2. Cc3; Cf6 3. Cd4; Cd5 4. Cxc6; dxc6 5.Cxd5; xd5
EJERCICIO 16: Había un peón blanco en b2 que come una pieza negra en a1 y se intercambia por dama blanca.