SOLUCIONES

1. Sean r,s,u,v números reales cualesquiera. Probar que:

   mín $\{r-s^2, s-u^2, u-v^2, v-r^2\} \leq \frac{1}{4}$

   (OME 2005)

   Solución:

   Supongamos que los cuatro números $r-s^2, s-u^2, u-v^2, v-r^2$ son mayores estrictamente que $\frac{1}{4}$.

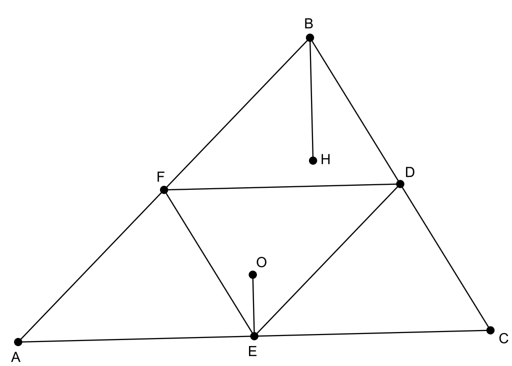
   Entonces $r-s^2+ s-u^2+ u-v^2+ v-r^2>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ o lo que es equivalente

   $0>(s^2-s+\frac{1}{4})+(r^2-r+\frac{1}{4})+(u^2-u+\frac{1}{4})+(v^2-v+\frac{1}{4})=(s-\frac{1}{2})^2+(r-\frac{1}{2})^2+(u-\frac{1}{2})^2+(v-\frac{1}{2})^2$

   Lo cual es imposible al ser una suma de números reales elevados al cuadrado, es decir una suma de números mayores o iguales que cero.
   Por lo tanto, mín $\{r-s^2, s-u^2, u-v^2, v-r^2\} \leq \frac{1}{4}$

2. Demostrar que en un triángulo la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice. (Fase Local 2007.)

   Solución.



   Sea ABC el triángulo, H el ortocentro, O el circuncentro y D, E, F los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Queremos probar que $BH = 2OE$.

Como el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF con razón 2 y O es el ortocentro del triángulo DEF, obtenemos que $BH = 2OE$

3. Prueba que para cualesquiera números reales a,b tales que 0<a,b<1, se cumple la siguiente desigualdad:

   $\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}$

   (OME 2008)

   Solución:

   Para todo x∈(0,1) se cumple que $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$.   (1)
   Como 0<a,b<1 se tiene que $0 < \frac{a+b}{2} < 1$,y por lo tanto $0 < ab(\frac{a+b}{2}) < 1$, utilizando la desigualdad anterior obtenemos:

   $\sqrt{ab(\frac{a+b}{2})} < \sqrt[3]{ab(\frac{a+b}{2})}$

   Y aplicando la desigualdad entre la media geométrica y aritmética obtenemos que:

   $\sqrt{ab(\frac{a+b}{2})} < \sqrt[3]{ab(\frac{a+b}{2})} \leq \frac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3} = \frac{a+b}{2}$

   Luego: $\sqrt{ab(\frac{a+b}{2})} < \frac{a+b}{2}$ (2)

   Del mismo modo, como $0 < a, b, \frac{a+b}{2} < 1$ se tiene que $0 < (1\text{-}a), (1\text{-}b), (1\text{-}\frac{a+b}{2}) < 1$, luego $0 < (1\text{-}a)(1\text{-}b)(1\text{-}\frac{a+b}{2}) < 1$, y utilizando la desigualdad (1) obtenemos que:

   $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-\frac{a+b}{2})} < \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-\frac{a+b}{2})}$

   Y aplicando de nuevo la desigualdad entre la media geométrica y aritmética obtenemos que:

   $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-\frac{a+b}{2})} < \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-\frac{a+b}{2})} \leq \frac{1-a+1-b+1-\frac{a+b}{2}}{3} =$

   $= 1 - \frac{a+b}{2}$

   Luego: $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-\frac{a+b}{2})} < 1 - \frac{a+b}{2}$ (3)

   Si ahora sumamos las desigualdades (2) y (3) obtenemos que:

   $\sqrt{ab(\frac{a+b}{2})} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-\frac{a+b}{2})} < 1$

O lo que es equivalente:

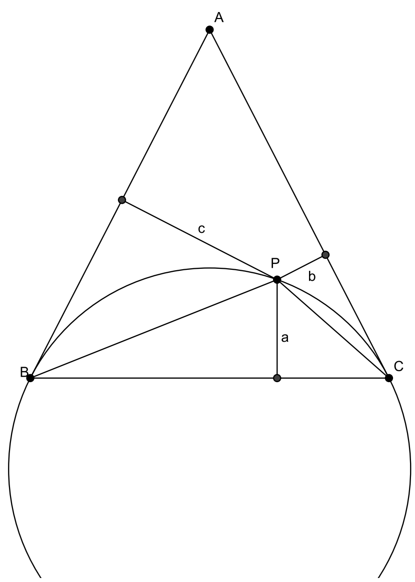
$1 > \sqrt{ab(\frac{a+b}{2})} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-\frac{a+b}{2})} = \sqrt{ab(\frac{a+b}{2})} + \sqrt{(1-a)(1-b)(\frac{(1-a)+(1-b)}{2})} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2b+ab^2} + \sqrt{(1-a)^2(1-b)+(1-a)(1-b)^2}\ )$

Por lo tanto $\sqrt{a^2b+ab^2} + \sqrt{(1-a)^2(1-b)+(1-a)(1-b)^2} < \sqrt{2}$

4. ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C. Denotemos por a, b y c a las distancias de P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que $a^2 = bc$. (OME 2006.)

Solución.



Como AB es tangente a la circunferencia en B, tenemos que $\angle ABP = \angle PCB$. Análogamente, $\angle ACP = \angle PBC$.
Aplicando el Teorema del seno tenemos que

$$\frac{a}{PC} = \operatorname{sen} \angle PCB = \operatorname{sen} \angle ABP = \frac{c}{PB}$$

$$\frac{a}{PB} = \operatorname{sen} \angle PBC = \operatorname{sen} \angle ACP = \frac{b}{PC}.$$

Entonces

$$c = \frac{a \cdot PB}{PC}$$
$$b = \frac{a \cdot PC}{PB}.$$

Multiplicando ambas igualdades obtenemos $a^2 = bc$.

5. Sean a,b,c números reales positivos tal que abc=1. Probar que:

   $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

   (IMO 1995)

   Solución:

   Sea x=$\frac{1}{a}$, y=$\frac{1}{b}$, z=$\frac{1}{c}$. Entonces:

   $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{ba+bc}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ca+cb}=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}$

   Sea S=$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}$, queremos ver que S$\geq\frac{3}{2}$
   Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre $(\frac{x}{\sqrt{y+z}},\frac{y}{\sqrt{x+z}},\frac{z}{\sqrt{x+y}})$ y $(\sqrt{y+z},\sqrt{x+z},\sqrt{x+y})$ obtenemos:

   (x+y+z)$^2\leq$S(2(x+y+z))

   Luego S$\geq\frac{x+y+z}{2}=\frac{x+y+z}{3}(\frac{3}{2})$ y aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica:

   S$\geq\frac{x+y+z}{2}=\frac{x+y+z}{3}(\frac{3}{2})\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$ (Observar que xyz=$\frac{1}{abc}=1$)

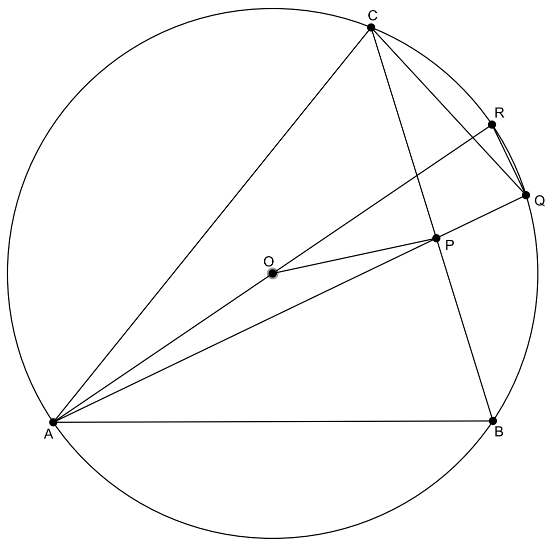
   Por tanto S=$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

6. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple

   $$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc.$$

   (OME 2007.)

Solución.



Prolongamos AP y AO hasta cortar a la circunferencia circunscrita la triángulo ABC en Q y R, respectivamente.
Como los triángulos APB y ACQ son semejantes (ya que $\angle BAP = \angle QAC$ y $\angle ABP = \angle AQC$), obtenemos que

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AQ}.$$

Por otra parte, usando el Teorema del coseno, tenemos que $OP^2 = AO^2 + AP^2 - 2AO \cdot AP \cdot \cos\angle OAP$.
Como AR es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, deducimos que $\cos\angle OAP = \frac{AQ}{AR}$. Despejando y denotando por R el radio de la circunferencia circunscrita, tenemos que

$$AO^2 + AP^2 - OP^2 = 2AO \cdot AP \cdot \frac{AQ}{AR} = 2R \cdot AP \cdot \frac{AQ}{2R} = AP \cdot AQ.$$

Pero, como vimos antes, $AP \cdot AQ = AB \cdot AC = bc$. Queda así probado el enunciado.

7. Sea $a \neq 1$ un número real positivo y n un entero positivo. Demostrar que $n^2 < \frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}$

(OME 2007)

Solución:

Tenemos que $\frac{a^{n}+a^{-n}-2}{a+a^{-1}-2}=\frac{(a^{n/2}-a^{-n/2})^2}{(a^{1/2}-a^{-1/2})^2}$, luego la desigualdad que tenemos que demostrar es equivalente a $n^2<\frac{(a^{n/2}-a^{-n/2})^2}{(a^{1/2}-a^{-1/2})^2}$
Sea $k=\sqrt{a}$, entonces esta igualdad es equivalente a $n<\frac{k^{n}-k^{-n}}{k-k^{-1}}$

Tenemos que $\frac{k^{n}-k^{-n}}{k-k^{-1}}=\frac{k^{-n}}{k^{-1}}\frac{k^{2n}-1}{k^2-1}=k^{1-n}(1+k^2+k^4+...+k^{2n-2})=nk^{1-n}\frac{(1+k^2+k^4+...+k^{2n-2})}{n}$

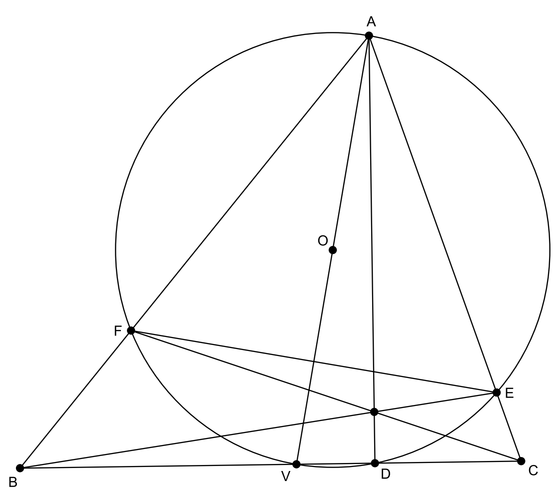
Aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica obtenemos:

$nk^{1-n}\frac{(1+k^2+k^4+...+k^{2n-2})}{n}>k^{1-n}n\sqrt[n]{k^{2+4+...+(2n-2)}}=k^{1-n}nk^{n-1}=n$

(La desigualdad es estricta ya que $a\neq1$)
Luego $n^2<\frac{a^{n}+a^{-n}-2}{a+a^{-1}-2}$

8. En un triángulo acutángulo ABC, con $AB \neq AC$, sea V la intersección de la bisectriz de A con BC y sea D el pie de la altura desde A a BC. Si E y F son las intersecciones de la circunferencia circunscrita a AVD con CA y AB, respectivamente, mostrar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Solución.



Sea O el centro de la circunferencia. Entonces O es el punto medio de AV ya que $\angle ADV = 90$.

Como $\angle OAF = \angle OAE = 90 - \angle AFE$, deducimos que $AO \perp EF$ (son perpendiculares) y entonces $AF = AE$.
Usando Ceva, para demostrar el enunciado bastará probar que

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

O bien, como $AF = AE$, probar que $\frac{BF}{BD} = \frac{CE}{DC}$.
Por otra parte, usando potencias tenemos que $BF \cdot BA = BV \cdot BD$, es decir, $\frac{BF}{BD} = \frac{BV}{BA}$. De igual forma $CE \cdot CA = CD \cdot CV$, o bien $\frac{CE}{CD} = \frac{CV}{CA}$.
Luego

$$\frac{BF}{BD} = \frac{CE}{DC} \Leftrightarrow \frac{BV}{BA} = \frac{CV}{CA},$$

y esto último es el Teorema de la bisectriz.

9. Sean a,b,c números reales positivos tal que abc=1. Prueba la desigualdad siguiente:

$(\frac{a}{1+ab})^2+(\frac{b}{1+bc})^2+(\frac{c}{1+ca})^2\geq\frac{3}{4}$

(OME 2009)

Solución:

Como abc=1, tenemos que $(\frac{a}{1+ab})^2=(\frac{a}{1+\frac{1}{c}})^2=(\frac{ca}{c+1})^2$.
Análogamente obtenemos que $(\frac{b}{1+bc})^2=(\frac{ab}{a+1})^2$y $(\frac{c}{1+ca})^2=(\frac{bc}{b+1})^2$.
Por tanto, la desigualdad requerida se convierte en:

$(\frac{ca}{c+1})^2+ (\frac{ab}{a+1})^2+ (\frac{bc}{b+1})^2\geq\frac{3}{4}$

Esta desigualdad a su vez es equivalente a:

$\sqrt{\frac{1}{3}[(\frac{ca}{c+1})^2 + (\frac{ab}{a+1})^2 + (\frac{bc}{b+1})^2]}\geq\frac{1}{2}$

Aplicando la desigualdad de la media aritmética y cuadrática en el primer miembro de la desigualdad obtenemos que:

$\sqrt{\frac{1}{3}[(\frac{ca}{c+1})^2 + (\frac{ab}{a+1})^2 + (\frac{bc}{b+1})^2]}\geq\frac{1}{3}[(\frac{ca}{c+1}) + (\frac{ab}{a+1}) + (\frac{bc}{b+1})]$

Luego, basta demostrar que: $\frac{1}{3}[(\frac{ca}{c+1}) + (\frac{ab}{a+1}) + (\frac{bc}{b+1})]\geq\frac{1}{2}$ o equivalentemente $(\frac{abc}{c(1+a)}) + (\frac{abc}{a(1+b)}) + (\frac{abc}{b(1+c)})\geq\frac{3}{2}$.

Además $(\frac{abc}{c(1+a)}) + (\frac{abc}{a(1+b)}) + (\frac{abc}{b(1+c)})=(\frac{1}{c(1+a)}) + (\frac{1}{a(1+b)}) + (\frac{1}{b(1+c)})$

Sustituyendo a=$\frac{x}{y}$,b=$\frac{y}{z}$ y c=$\frac{z}{x}$en la última desigualdad obtenemos:

$(c+ca)^{-1}(a+ab)^{-1}(b+bc)^{-1}=(\frac{z}{x}+\frac{z}{y})^{-1}(\frac{x}{y}+\frac{x}{z})^{-1}(\frac{y}{z}+\frac{y}{x})^{-1}$

Sustituyendo ahora $k=\frac{1}{x}$,$m=\frac{1}{y}$ y $n=\frac{1}{z}$ llegamos a:

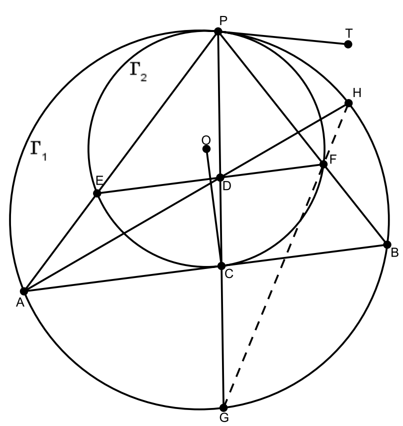
$(\frac{1}{c(1+a)})+(\frac{1}{a(1+b)})+(\frac{1}{b(1+c)})=(\frac{n}{k+m})+(\frac{k}{n+m})+(\frac{m}{k+n})$ que es mayor o igual que $\frac{3}{2}$ por la desigualdad de Nesbitt.

De este modo hemos demostrado que $(\frac{abc}{c(1+a)})+(\frac{abc}{a(1+b)})+(\frac{abc}{b(1+c)})\geq\frac{3}{2}$ o equivalentemente:

$(\frac{a}{1+ab})^2+(\frac{b}{1+bc})^2+(\frac{c}{1+ca})^2\geq\frac{3}{4}$

10. Una circunferencia Γ_2 es tangente interiormente a la circunferencia Γ_1 circunscrita al triángulo PAB en P y al lado AB en C. Sean E y F la intersección de Γ_2 con los lados PA y PB, respectivamente. Sea D el punto de intersección de EF con PC. Las rectas PD y AD intersecan de nuevo a Γ_1 en G y H, respectivamente. Probar que F, G, H están alineados.

Solución.



Sea PT la tangente exterior a las circunferencias en P. Entonces

$$\angle PAB = \angle BPT = \angle PEF,$$

luego $EF \parallel AB$. Sea O el centro de Γ_2. Como $OC \perp AB$ (porque AB es tangente a Γ_2 en C), deducimos que $OC \perp EF$ y por tanto OC es la mediatriz del segmentoEF, es decir, C es el punto medio del arco EF. Entonces PC es la bisectriz de $\angle EPF$. Por otra parte

$$\angle HDF = \angle HAB = \angle BPH,$$

luego el cuadrilátero $PDFH$ es cíclico y por tanto

$$\angle DHF = \angle DPF = \angle EPD = \angle APG = \angle AHG = \angle DHG.$$

Esto prueba que G, H, F están en la misma recta.