Preparación para la XLVII Olimpiada Matemática Española (II) Soluciones

Eva Elduque Laburta y Adrián Rodrigo Escudero

5 de noviembre de 2010

Problema 1. Construir un triángulo conocidos

1. un lado, su ángulo opuesto y, la altura a ese lado $(a, \widehat{A}, h_a)$.
2. los ángulos de dos vértices, y la altura desde uno de ellos $(\widehat{B}, \widehat{C}, h_c)$.
3. el ángulo de un vértice, la altura desde otro vértice, y la mediana desde el vértice restante $(\widehat{C}, h_b, m_a)$.

Solución.

1. Trazamos un segmento BC de longitud a, dibujamos su arco capaz de ángulo $\widehat{A}$, y una recta paralela al segmento y a distancia h_a de él. El punto de corte de la recta con el arco capaz será el vértice A del triángulo pedido.
2. Construimos un triángulo cualquiera de ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, llamemos h a la altura de éste triángulo trazada desde el vértice de ángulo $\widehat{C}$. Éste triángulo es semejante al pedido, por lo que sólo nos falta hacer una homotecia de razón h_c/h.

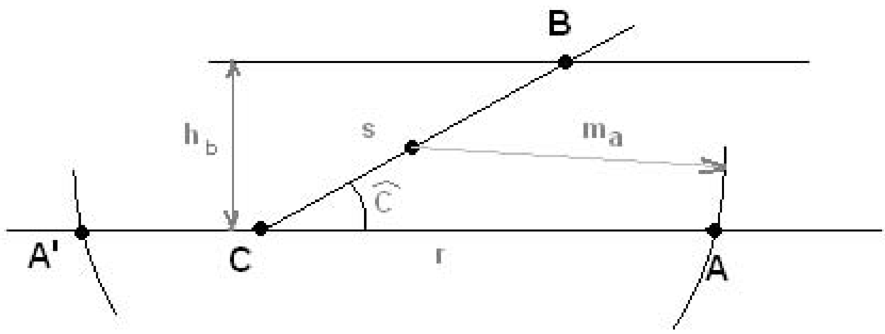

Figura 1: Problema 1.3

3. Dibujamos dos rectas r, s que se cortan en C y que forman un ángulo $\widehat{C}$. Trazamos una recta paralela a la recta r y a distancia h_b de ella, y

llamamos B al punto de corte de esta recta con la recta s. Finalmente el vértice A será el punto de corte de la recta r con la circunferencia de centro el punto medio de BC y radio m_a. Notar que en general tendremos dos soluciones no equivalentes.

Problema 2 (OME 2000, fase local)**.** Considérese la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determínense las dos últimas cifras de a_{2000}.

Solución. Trabajaremos con congruencias módulo 100.
Calculamos los primeros términos de la sucesión:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3 \equiv 3 \\
a_2 &= 3 + 9 \equiv 12 \\
a_3 &= 12 + 144 \equiv 56 \\
a_4 &= a_3 + a_3^2 \equiv 56 + 56^2 = 3192 \equiv 92 \\
a_5 &= a_4 + a_4^2 \equiv 92 + 92^2 = 8556 \equiv 56
\end{aligned}$$

Vemos que para calcular a_6 debemos hacer los mismos cálculos que hemos hecho con a_4, por tanto la sucesión se repite. Así, si $n \geq 4$ tenemos:

$$\begin{aligned}
a_n &\equiv 92 \quad \text{si } n \text{ es par} \\
a_n &\equiv 56 \quad \text{si } n \text{ es impar}
\end{aligned}$$

Y por tanto las dos últimas cifras de a_{2000} son 92.

Problema 3 (Olimpíada Matemática Argentina 2004, fase nacional)**.** De una bolsa con 7 kilogramos de arroz se debe separar exactamente 1 kilogramo de arroz. Para ello se dispone de una balanza de dos platos y una pesa de 600 gramos. Dar una manera de hacerlo realizando tres pesadas.

Aclaración: La balanza de dos platos sólo permite afirmar que cuando se equilibra los objetos colocados en ambos platos pesan lo mismo.

Solución. A partir de ahora expresaremos todas las medidas en kilogramos.

1. Ponemos todo el arroz y la pesa en uno de los platos. Pasamos arroz al otro plato hasta que se iguale. De esta manera obtenemos dos montones de arroz, uno de $3,2$ y otro de $3,8$.

2. Dividimos el montón de $3,2$ con la balanza, obteniendo dos montones de $1,6$.

3. Colocamos una pesa en un plato, y sustraemos arroz de un montón de $1,6$ para ponerlo en el otro plato. Así, cuando la balanza esté equilibrada tendremos un montón de 1.

Problema 4. Construir un triángulo rectángulo del que se conoce su perímetro y uno de sus catetos ($\widehat{A} = 90, a + b + c, c$).

Solución.
Dibujamos el cateto AB conocido, y el segmento AP perpendicular a él y de longitud el perímetro menos la longitud del cateto. El último vértice C será el punto de corte de AP con la mediatriz del segmento BP.

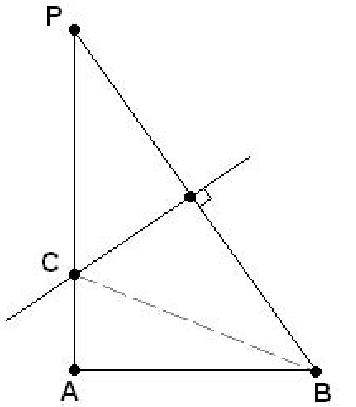

Figura 2: Problema 4

Problema 5. Construir un triángulo del que se conocen sus alturas (h_a, h_b, h_c).

Solución.

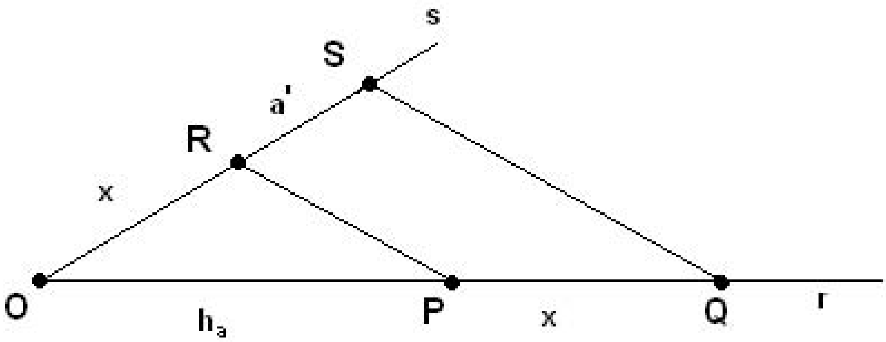

Figura 3: Problema 5

Sea S la superficie del triángulo pedido, se tiene que

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

Por tanto los lados del triángulo son inversamente proporcionales a sus alturas.

Nuestro objetivo ahora es dibujar tres segmentos a', b', c' inversamente proporcionales a h_a, h_b, h_c.[1] Para ello primero fijamos una distancia x. Trazamos dos rectas r, s que se cortan en O, y marcamos los puntos P, Q en r y R, S en s de forma que: $OP = h_a$, $PQ = OR = x$, SQ paralela a RP. Tomamos $a' = RS$, el teorema de Tales nos asegura que $a' = x^2/h_a$. Procedemos de forma análoga para hallar b' y c'.

Así hemos hallado un triángulo proporcional al pedido, para acabar sólo tenemos que hacer una homotecia de razón h_a/h'_a (donde h'_a es la altura sobre el lado a' del triángulo de lados a', b', c').

[1] Notar que a', b', c' serán proporcionales a a, b, c, pero no necesariamente iguales.

Problema 6. Sea $ABCD$ un trapecio con bases AB y CD. Las diagonales AC y BD se cortan en P, y los lados AD y BC se cortan en Q. Demostrar que PQ corta a las bases en sus puntos medios.

Solución.

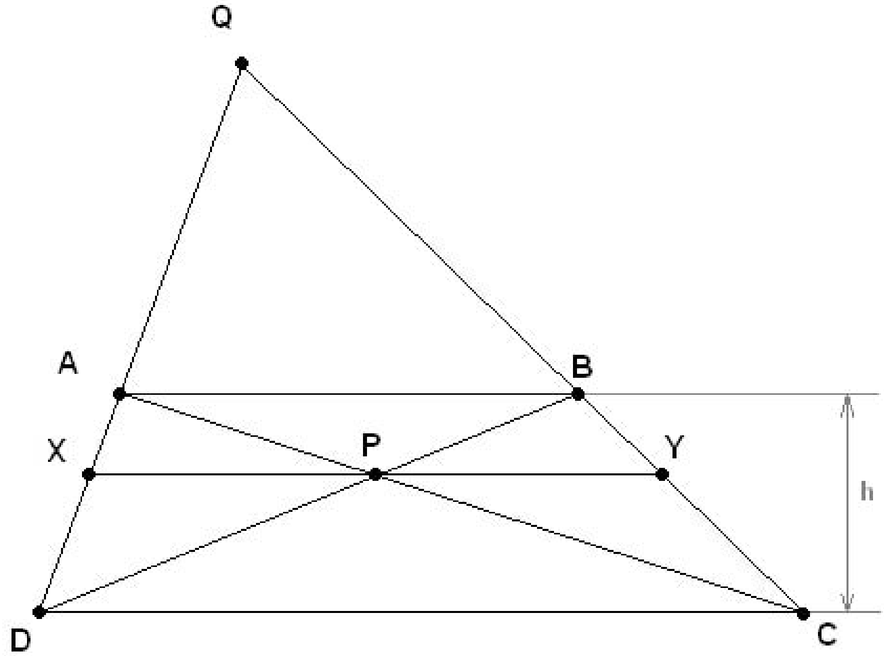

Figura 4: Problema 6

Consideramos la recta paralela a CD y que pasa por P, llamemos X, Y a los puntos de corte de esta recta con QD y QC respectivamente. Tenemos que probar que QP es una de las medianas del triángulo CDQ. Para ver ésto basta que demostremos que $XP = PY$.

Sea h la altura desde el vértice A del triángulo ADC, que es igual a la altura desde B del triángulo BDC. Los triángulos ADC y BDC tienen la misma superficie, ya que tienen la misma base (DC) y la misma altura (h). Por tanto los triángulos ADP y BPC también tienen la misma superficie. Como las superficies de ADP y BPC son, respectivamente

$$\frac{h \cdot XP}{2} \qquad \frac{h \cdot PY}{2},$$

concluimos que $XP = PY$.

Problema 7. Construir un triángulo dados su circunradio, un lado, y la suma de los otros dos lados $(R, a, b + c)$.

Solución.

Dibujamos una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio R y una cuerda BC de longitud a. Esto nos determina el ángulo $\widehat{A}$. Trazamos el arco capaz del segmento BC de

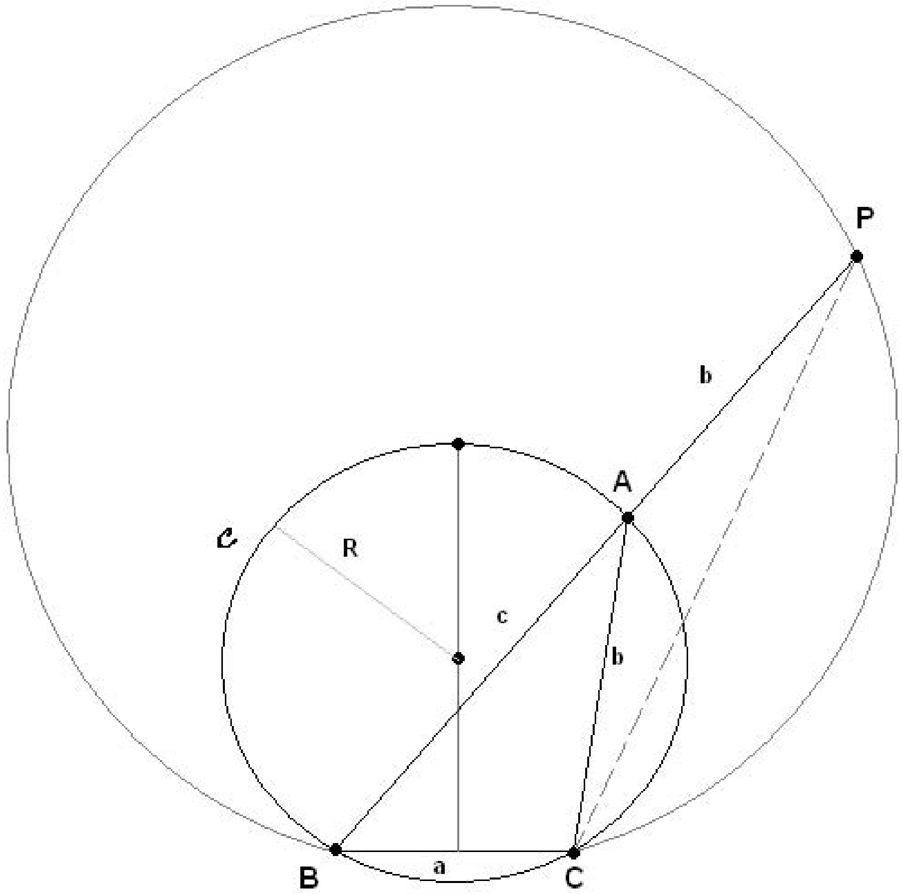

Figura 5: Problema 7

ángulo $\widehat{A}/2$, y hallamos su punto de corte P con la circunferencia de centro B y radio $b+c$. Sea A el punto de corte de BP con $\mathcal{C}$. Tenemos que

$$\widehat{CAP} = 180 - \widehat{A},$$

por lo que

$$\widehat{ACP} = \frac{\widehat{A}}{2}$$

Así, el triángulo ACP es isósceles, y $AP = AC$. Por lo cual el triángulo ABC cumple con lo pedido.