Preparación para la XLVII Olimpiada Matemática Española (I)

Eva Elduque Laburta y Adrián Rodrigo Escudero

22 de octubre de 2010

Problema 1 (OME 2005, fase local)**.** Sean x, y números reales positivos.

1. Si $x + y \geq 2$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 2$?
2. Si $x + y \leq 2$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2$?

Solución.

1. No. Si, por ejemplo, $x = \frac{1}{2}, y = 2$, entonces $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 + \frac{1}{2} > 2$.
2. Sí, para demostrar que es cierto comenzamos recordando el siguiente teorema.

   Teorema (Desigualdad de las medias)**.** *Sean a, b números reales positivos, entonces*
   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
   ■

   Recordamos también que una forma de demostrar el teorema es reescribir la desigualdad como $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 0$, que es cierto ya que el cuadrado de un número nunca puede ser negativo. Ahora ya estamos en condiciones de abordar el problema.

   Aplicamos dos veces el teorema, una con $a = x$, $b = y$:
   $$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$
   Y la otra con $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$:
   $$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{y}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$
   Juntando ambas desigualdades y teniendo en cuenta la hipótesis ($2 \geq x+y$) llegamos a la solución:
   $$1 = \frac{2}{2} \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2$$

Problema 2 (OME 2005, fase local)**.** Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia.

Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca. Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción.

Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?

Solución. Si asignamos a cada bola negra el valor 1 y a cada bola blanca el valor -1, se observa que dos bolas consecutivas se sustituyen por su producto.

Considerando el producto P de los nueve valores antes y después de cada operación, vemos que el nuevo P es igual al cuadrado del anterior P. Así, siempre será $P = 1$ después de cada operación.

Puesto que nueve bolas blancas darían $P = -1$, no es posible obtener una tal configuración.

Problema 3 (OME 1996, fase nacional)**.** Sean a, b números naturales tales que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

es un número natural. Sea d el máximo común divisor de a y b. Probar que

$$d \leq \sqrt{a+b}$$

Solución. Escribimos $a = Ad, b = Bd$. Calculando vemos que:

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{A^2d + A + B^2d + B}{ABd}$$

Por tanto d divide a $A + B$, y d^2 divide a $a + b$, luego $d^2 \leq a + b$

Problema 4 (OME 1994, fase nacional)**.** Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de 3 filas y 7 columnas. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

Solución. Por el principio del palomar, hay al menos 11 fichas del mismo color, supondremos que blanco. Distinguimos dos casos:

1. Si hay al menos una columna con sus tres fichas blancas. Por el principio del palomar, como quedan al menos 8 fichas blancas por colocar en las otras 6 columnas, hay al menos otra columna con 2 o más fichas blancas, que están situadas en los vértices de un rectángulo cuyos otros dos vértices están en la columna con 3 fichas blancas.

2. Si no hay ninguna columna con tres fichas blancas. Por el principio del palomar hay al menos 4 columnas con 2 fichas blancas cada una. Como en cada columna la ficha negra puede estar en 3 posiciones posibles, hay dos columnas iguales cuyas fichas blancas forman un rectángulo.

Problema 5 (Set 2, José Luis Díaz Barrero)**.** Sean $a_1, a_2, \ldots, a_9$ nueve números naturales de forma que ninguno de ellos tiene un divisor primo mayor que 6. Probar que hay dos cuyo producto es un cuadrado perfecto.

Solución. Los únicos divisores primos posibles son 2, 3, y 5. Así, cada número a_i lo podemos factorizar:

$$a_i = 2^{b_i} 3^{c_i} 5^{d_i}$$

A cada número a_i le asignamos una terna (x_i, y_i, z_i) donde:

1. $x_i = 0$ si b_i es par, y $x_i = 1$ si b_i es impar.
2. $y_i = 0$ si c_i es par, y $y_i = 1$ si c_i es impar.
3. $z_i = 0$ si d_i es par, y $z_i = 1$ si d_i es impar.

Hay $2^3 = 8$ ternas distinas posibles que podemos asignar, por el principio del palomar al menos dos números a_j, a_k tendrán la misma terna. Así:

$$a_j a_k = 2^{b_j+b_k} 3^{c_j+c_k} 5^{d_j+d_k} = 2^{2m} 3^{2n} 5^{2s} = (2^m 3^n 5^s)^2$$

Problema 6 (IMO 1975)**.** Sean $x_1 < \ldots < x_n$, $y_1 < \ldots < y_n$, dos secuencias ordenadas de n números reales distintos. Sea $z_1, \ldots, z_n$ la secuencia $y_1, \ldots, y_n$ en otro orden (puede que el mismo). Probar que:

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2$$

¿En qué casos se da la igualdad?

Solución. Como hay un número finito de formas distintas de ordenar la secuencia $z_1, \ldots, z_n$, habrá una que minimice el valor $(x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2$. Nos ponemos en lo peor y suponemos que es éste el caso. Veamos ahora que si $i < j \Rightarrow z_i < z_j$. Cuando lo hayamos hecho habremos demostrado lo que nos pedían, y además habremos visto que la igualdad sólo se puede dar si el nuevo orden es el mismo que antes.

Supongamos que no es así, entonces habría dos índices m, n, con $m < n$ y $z_m > z_n$. Pero:

$$\begin{aligned}
(x_m - z_n)^2 + (x_n - z_m)^2 &= (x_m - z_m)^2 + (x_n - z_n)^2 \\
&\quad +2(x_m z_m + x_n z_n - x_m z_n - x_n z_m) \\
&= (x_m - z_m)^2 + (x_n - z_n)^2 + 2(x_m - x_n)(z_m - z_n) \\
&< (x_m - z_m)^2 + (x_n - z_n)^2
\end{aligned}$$

Luego hemos encontrado otra ordenación que minimiza más, lo que es una contradicción.