Preparación para la XLVII Olimpiada Matemática Española (I)

Eva Elduque Laburta y Adrián Rodrigo Escudero

22 de octubre de 2010

Problema 1 (OME 2005, fase local). Sean x, y números reales positivos.

1. Si $x + y \geq 2$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 2$?

2. Si $x + y \leq 2$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2$?

Problema 2 (OME 2005, fase local). Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia.

Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca. Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción.

Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?

Problema 3 (OME 1996, fase nacional). Sean a, b números naturales tales que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

es un número natural. Sea d el máximo común divisor de a y b. Probar que

$$d \leq \sqrt{a+b}$$

Problema 4 (OME 1994, fase nacional). Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de 3 filas y 7 columnas. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

Problema 5 (Set 2, José Luis Díaz Barrero). Sean $a_1, a_2, \ldots, a_9$ nueve números naturales de forma que ninguno de ellos tiene un divisor primo mayor que 6. Probar que hay dos cuyo producto es un cuadrado perfecto.

Problema 6 (IMO 1975). Sean $x_1 < \ldots < x_n$, $y_1 < \ldots < y_n$, dos secuencias ordenadas de n números reales distintos. Sea $z_1, \ldots, z_n$ la secuencia $y_1, \ldots, y_n$ en otro orden (puede que el mismo). Probar que:

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2$$

¿En qué casos se da la igualdad?