



Taller de Talento Matemático  
Profundización de conocimientos

ARITMÉTICA    ARITMÉTICA  
SIMÉTRICA    SIMÉTRICA

**José María Muñoz Escolano**

Departamento de Matemáticas

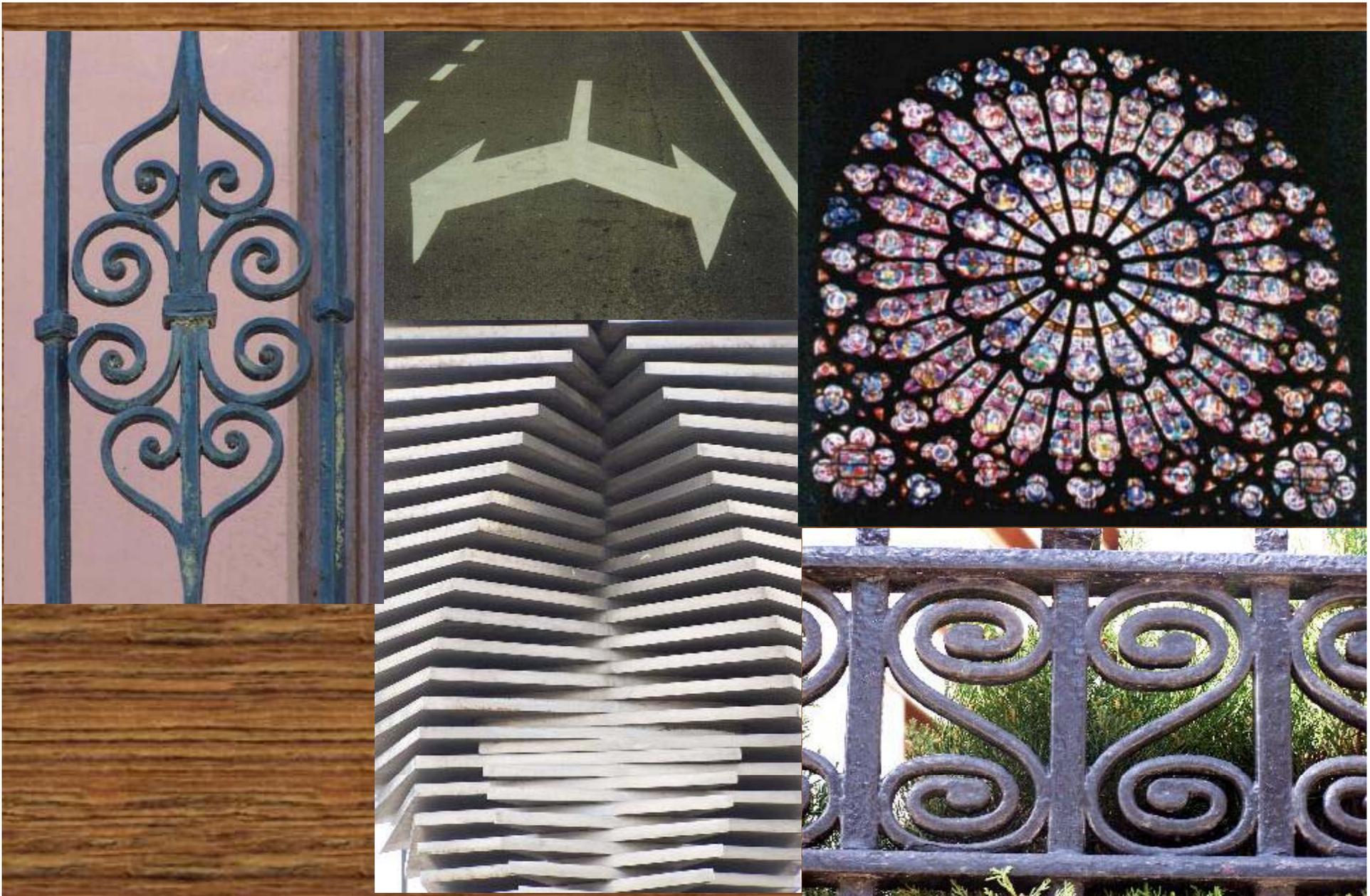
Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación de Huesca

Teruel, 6 de mayo de 2011

# SIMETRÍAS

**EN LA NATURALEZA,  
EN LOS OBJETOS,  
EN LA CIUDAD,  
EN EL ARTE ...**





Imágenes extraídas de la web: *Matemáticas en tu mundo* de José M<sup>a</sup> Sorando

José M<sup>a</sup> Muñoz Escolano. *Aritmética simétrica*. TTM Teruel.

# SIMETRÍAS

## EN LAS PALABRAS (*palíndromos*)

OSO

somos

reconocer

radar

soldadlos

## EN LAS FRASES

¿acaso hubo búhos acá?

Adán no calla con nada

la ruta nos aportó otro paso natural

# SIMETRÍAS EN LOS NÚMEROS *números capicúas*

11, 55, 272, 80308, 456654, ...

**¿Cuántos números capicúas existen?**

Reformulamos la cuestión:

**¿Cuántos capicúas de 2 cifras existen?**

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99

9 números en total

# SIMETRÍAS EN LOS NÚMEROS

¿Y de 3 cifras?

¿Y de 4 cifras?

¿Y de 5 cifras?

¿Y de 6 cifras?

| Número de CIFRAS | Número de CAPICÚAS |
|------------------|--------------------|
| 2                | 9                  |
| 3                | 90                 |
| 4                | 90                 |
| 5                | 900                |
| 6                | 900                |
|                  |                    |

# SIMETRÍAS EN LOS NÚMEROS

¿Cuántos capicúas de  $n$  cifras existen?

Si  $n$  es par,

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{C_n} & \boxed{C_{n-1}} & \dots & \boxed{C_{(n/2)+1}} & \boxed{C_{n/2}} & \dots & \boxed{C_2} & \boxed{C_1} \\ 9 & 10 & \dots & 10 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & & 9 \cdot 10^{\frac{n-2}{2}} & & & \end{array}$$

Si  $n$  es impar,

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{C_n} & \boxed{C_{n-1}} & \dots & \boxed{C_{k+1}} & \boxed{C_k} & \boxed{C_{k-1}} & \dots & \boxed{C_2} & \boxed{C_1} \\ 9 & 10 & \dots & 10 & 10 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & & & & & & 9 \cdot 10^{\frac{n-1}{2}} \end{array}$$

# SIMETRÍA EN OPERACIONES ARITMÉTICAS

$$\begin{array}{r} 37 + 95 = 59 + 73 \\ 132 \qquad \qquad 132 \end{array}$$

¿Esto pasa siempre con cualquier par de números?

**NO**, por ejemplo:  $36 + 94$  no es igual a  $49 + 63$   
 $130 \qquad \qquad \qquad 112$

Encontrar 10 ejemplos de pares de números (de dos cifras) en los que **SÍ** se cumple

# SIMETRÍA EN LA SUMA

$$37 + 95 = 59 + 73$$

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla

$$\underline{ab} + \underline{cd} = \underline{dc} + \underline{ba}$$

a, b, c, d distintos de 0

$$ab = (10 \times a) + b$$

$$dc = (10 \times d) + c$$

$$cd = (10 \times c) + d$$

$$ba = (10 \times b) + a$$

$$(10a + b) + (10c + d) = (10d + c) + (10b + a)$$

$$9a + 9c = 9b + 9d$$

$$\mathbf{a + c = b + d}$$

# SIMETRÍA EN LA SUMA

$$37 + 95 = 59 + 73$$

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla

$$ab + cd = dc + ba$$

$a, b, c, d$  distintos de 0, así que  $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$a + c = b + d$$

Elige un número de dos cifras (que no tenga 0)

Calcula qué números se suman "simétricamente" con número elegido

¿Qué ocurre cuando uno de los números es capicúa?

# SIMETRÍA EN LA MULTIPLICACIÓN

$$33 \times 44 = 44 \times 33$$

$$96 \times 23 = 32 \times 69$$

$$2208 \qquad 2208$$

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla

$$\underline{ab} \times \underline{cd} = \underline{dc} \times \underline{ba}$$

a, b, c, d distintos de 0, así que  $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$ab = (10 \times a) + b$$

$$dc = (10 \times d) + c$$

$$cd = (10 \times c) + d$$

$$ba = (10 \times b) + a$$

**Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla**

$$\mathbf{ab \times cd = dc \times ba}$$

a, b, c, d distintos de 0, así que  $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$ab = (10 \times a) + b$$

$$dc = (10 \times d) + c$$

$$cd = (10 \times c) + d$$

$$ba = (10 \times b) + a$$

$$(10a + b) \times (10c + d) = (10d + c) \times (10b + a)$$

$$100ac + 10cb + 10ad + bd = 100bd + 10cb + 10ad + ac$$

$$99ac = 99bd$$

$$ac = bd$$

$$\mathbf{a \times c = b \times d}$$

**Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de dos cifras) para que se cumpla**

$$\mathbf{ab \times cd = dc \times ba}$$

$a, b, c, d$  distintos de 0, así que  $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$\mathbf{a \times c = b \times d}$$

**Elige un número de dos cifras (que no tenga 0)**

**Calcula qué números se multiplican "simétricamente" con número elegido**

## Condiciones de los pares de números (de 2 cifras) para la suma "simétrica"

$$ab + cd = dc + ba$$

$a, b, c, d$  distintos de 0, así que  $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$a + c = b + d$$

## Condiciones de los pares de números (de 2 cifras) para la multiplicación "simétrica"

$$ab \times cd = dc \times ba$$

$a, b, c, d$  distintos de 0, así que  $1 \leq a, b, c, d \leq 9$

$$a \times c = b \times d$$

**Todos estos resultados  
son válidos para  
números de 2 cifras ...**

**¿y para el resto?**

# Suma simétrica Núm. de 3 cifras

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de tres cifras) para que se cumpla

$$\underline{abc} + \underline{def} = \underline{fed} + \underline{cba}$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$abc = 100xa + 10xb + c$$

$$def = 100xd + 10xe + f$$

$$fed = 100xf + 10xe + d$$

$$cba = 100xc + 10xb + a$$

$$100a + 10b + c + 100d + 10e + f = 100f + 10e + d + 100c + 10b + a$$

$$99a + 99d = 99f + 99c$$

$$a + d = c + f$$

# Suma simétrica Núm. de 3 cifras

Condiciones de los pares de números (de 3 cifras)  
para la suma "simétrica"

$$abc + def = fed + cba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a + d = c + f$$

Condiciones de los pares de números (de 2 cifras)  
para la suma "simétrica"

$$ab + cd = dc + ba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a + c = b + d$$

# Suma simétrica Núm. de 3 cifras

Condiciones de los pares de números (de 3 cifras)  
para la suma "simétrica"

$$abc + def = fed + cba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a + d = c + f$$

Condiciones de los pares de números (de 2 cifras)  
para la suma "simétrica"

$$ab + cd = dc + ba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a + c = b + d$$

# Casos más fáciles

Números de 1 cifra

Números de 1 cifra con  
números de 2 cifras

Números de 1 cifra con  
números de 3 cifras

Números de 1 cifra con  
números de  $n$  cifras

# Suma simétrica

Núm. de 3 cifras y núm. de 2 cifras

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de 3 y 2 cifras) para que se cumpla

$$\underbrace{abc}_{\text{3 cifras}} + \underbrace{de}_{\text{2 cifras}} = \underbrace{ed}_{\text{2 cifras}} + \underbrace{cba}_{\text{3 cifras}}$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$abc = 100a + 10b + c$$

$$ed = 10e + d$$

$$de = 10d + e$$

$$cba = 100c + 10b + a$$

$$100a + 10b + c + 10d + e = 10e + d + 100c + 10b + a$$

$$99a + 9d = 99c + 9e$$

$$11a + d = 11c + e \quad \text{¿y ahora qué?}$$

$$11a - 11c = e - d$$

$$11(a - c) = e - d$$

# Suma simétrica

Núm. de 3 cifras y núm. de 2 cifras

Averiguar qué condiciones deben tener los pares de números (de 3 y 2 cifras) para que se cumpla

$$abc + de = ed + cba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$11(a - c) = e - d$$

¿ Qué valores puede tener  $e-d$  ?  $-8 \leq e - d \leq 8$

¿ Qué valores puede tener  $11(a-c)$  ?

$$11(a-c) \geq 11 \quad \text{si } a-c \text{ es positivo}$$

$$11(a-c) \leq -11 \quad \text{si } a-c \text{ es negativo}$$

$$11(a-c) = 0 \quad \text{si } a-c = 0$$

La igualdad solo puede ser cierta cuando

$$a-c = 0$$

$$e-d = 0$$

# Suma simétrica

Núm. de 3 cifras y núm. de 2 cifras

Condiciones de los pares de números (de 3 y 2 cifras) para que se cumpla la suma simétrica

$$abc + de = ed + cba$$

$$1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$$

$$a = c \quad \text{y} \quad e = d$$

**abc** es capicúa      **de** es capicúa

# Nuevos problemas

¿Qué condiciones cumplen los pares de números (de  $n$  cifras) para que se cumpla la suma simétrica?

$$X_1X_2\dots X_n + y_1y_2\dots y_n = y_n\dots y_2y_1 + X_n\dots X_2X_1$$

¿Qué ocurre con las multiplicaciones?

¿Qué ocurre con las restas y las divisiones?

¿Qué ocurre cuando hay más de una suma?

$$ab + cd + ef = fe + dc + ba$$

¿Qué ocurre cuando hay más de una operación?

$$ab \times cd + ef = fe + dc \times ba$$

# La conjetura capicúa

Para obtener un número capicúa a partir de otro número se invierte el orden de sus cifras y se suman el número dado y el invertido.

Este proceso se continúa las veces que sean necesarias hasta obtener un capicúa.

Por ejemplo: Partiendo del 78.

$$78 + 87 = 165$$

$$165 + 561 = 726$$

$$726 + 627 = 1353$$

$$1353 + 3531 = 4884$$

CAPICÚA

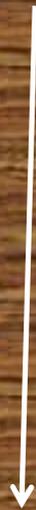
La conjetura capicúa dice:

*“ Aplicando el proceso anterior a un número cualquiera, se obtiene capicúa en un número finito de pasos ”*

No se sabe todavía si es cierta o no  
*(por eso se llama conjetura)*

|                       |                             |
|-----------------------|-----------------------------|
| Already a Palindrome  | Four-Step Palindrome        |
| One-Step Palindrome   | Six-Step Palindrome         |
| Two-Step Palindrome   | Twenty-Four-Step Palindrome |
| Three-Step Palindrome |                             |

89  
 $89 + 98 = 187$   
 $187 + 781 = 968$



8813200023188

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

En los primeros **10.000** números,  
solo **251** números no generan un  
capicúa en menos de 23 pasos  
(Gardner, 1979).

## Los números Lychrel

*Se llamarían así a aquellos números que no cumplirían la conjetura capicúa*

Un *buen candidato* a ser n<sup>o</sup>. Lychrel: **196**

Con ayuda de un ordenador, Wade VanLandingham (2008) después de realizar **724.756.966 pasos** con el 196 no obtuvo ningún capicúa.

El último número que alcanzó tenía

**300 millones de cifras**

Si se establecen los márgenes de 0,8 cm. en cada folio, entonces se necesitan más de **50.420 páginas** para imprimirlo.

Suponiendo una velocidad de impresión de 16 páginas por minuto, se necesitarían más de **52 horas y media** para imprimirlo.

*Muchas gracias  
por vuestra atención*