**Permutaciones.**

En Matemáticas, dado un conjunto finito con todos sus elementos diferentes, llamamos permutación a cada una de las posibles ordenaciones de los elementos de dicho conjunto.

Por ejemplo, en el conjunto $1, 2, 3$, cada ordenación posible de sus elementos, sin repetirlos, es una permutación. Existe un total de 6 permutaciones para estos elementos: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ y $(3, 2, 1)$.

**Proposición 1.** Dado un conjunto finito y ordenado de $n$ elementos, el número de permutaciones diferentes posibles es $n(n-1)(n-2)\cdots 1$.

**Demostración.**

Dado que hay $n$ formas de escoger el primer elemento y, una vez escogido éste, sólo tenemos $n-1$ formas de escoger el segundo elemento, y así sucesivamente, vemos que cuando llegamos al elemento k-ésimo sólo tenemos $n-k+1$ posibles elementos para escoger, lo que nos lleva a que tenemos $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ formas de elegir los $n$ elementos de forma ordenada.

Denotamos por $n!$ a $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$. Se lee *n factorial* o *factorial de n*. Por definición $0! = 1$.

**Coeficientes binomiales o Números combinatorios.**

Los coeficientes binomiales o números combinatorios indican el número de formas en que se pueden extraer subconjuntos a partir de un conjunto dado.

¿De cuántas formas podemos elegir $k$ elementos de un conjunto dado de $n$? Esto se representa $\binom{n}{k}$. Se lee *combinaciones de n en k*.

**Proposición 2.** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

**Demostración.**

La elección ordenada de $k$ elementos puede hacerse de $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ formas. Ahora, hay que dividir el producto anterior entre el número de selecciones «equivalentes». Los $k$ objetos se pueden permutar de $k!$ formas. Por tanto, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Una de las aplicaciones más importantes de los coeficientes binomiales es el **Binomio de Newton** :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots + \binom{n}{n}y^n,$$

donde $n$ es un entero positivo. Su demostración se puede hacer fácilmente usando inducción matemática y la propiedad 2 que veremos más adelante.

Tomando $x = y = 1$ en la fórmula del Binomio de Newton tenemos

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Este resultado puede obtenerse también de la siguiente forma. Contemos el número total de subconjuntos de un conjunto dado de $n$ elementos. Por una parte sabemos que es $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$. Otra forma de contarlos sería estableciendo una serie de correspondencias entre cada subconjunto y una serie de sí/no, dependiendo si el elemento está o no en el subconjunto. Por ejemplo, al subconjunto vacío le hacemos corresponder el (no,no,...,no), al formado por todos los elementos el (sí,sí,...,sí), etc. Así, a cada conjunto le corresponde una seria de sí/no y viceversa. Por tanto, como a cada uno de los $n$ elementos le podemos asignar un sí o un no, el número total de subconjuntos será $2^n$.

Otras propiedades importantes de los coeficientes binomiales son las siguientes:

**Propiedad 1.** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

**Propiedad 2.** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Estas dos propiedades se deducen fácilmente de la proposición 2. Daremos otras soluciones más intuitivas.

**Demostración de Propiedad 1.** Elegir de $n$ elementos los $k$ con los que nos queremos quedar es lo mismo que elegir los $n-k$ con los que no nos queremos quedar. Esto es, una elección de $k$ elementos con los que nos queremos quedar determina una elección de $n-k$ elementos con los que no nos queremos quedar y viceversa.

**Demostración de Propiedad 2.** Seleccionemos un elemento cualquiera de los $n$ dados. Dividimos el número de subconjuntos de $k$ elementos en dos grupos. Por una parte, aquellos subconjuntos que contienen el elemento seleccionado y por otra los que no lo contienen. En el primer caso tenemos $\binom{n-1}{k-1}$ subconjuntos y en el segundo $\binom{n-1}{k}$. Por tanto, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Este último resultado es debido a Blaise Pascal en 1654. ¿Qué relación tiene el triángulo de Pascal (o de Tartaglia) con las propiedades 1, 2 y los coeficientes binomiales del Binomio de Newton? Nótese que los elementos de la fila $i$-ésima son los coeficientes de los sumandos en el desarrollo de $(x+y)^i$ usando el Binomio de Newton. La simetría se debe a la propiedad 1 y el hecho de que la suma de dos elementos consecutivos de una fila sea el elementos que tienen debajo es consecuencia de la propiedad 2.

**El Principio Extremal.**

El Principio Extremal tiene aplicaciones en casi todos los campos de las Matemáticas; sin embargo, no es fácil de reconocer, y debe ser por tanto entrenado.

Tratamos de probar la existencia de un objeto con ciertas propiedades. El Principio Extremal nos dice que seleccionemos un objeto que maximiza o minimiza alguna función. Se demuestra que el objeto resultante tiene la propiedad deseada probando que una pequeña variación aumentaría o disminuiría la función dada. Si hay varios objetos óptimos, normalmente da igual cuál usar. Además, el Principio Extremal es muchas veces constructivo, dando un algoritmo para construir el objeto.

Veamos un par de ejemplos.

**Problema 1.** En el parlamento de Sikinia cada miembro tiene a lo sumo tres enemigos entre los restantes miembros. Probar que se puede dividir el parlamento en dos salas de manera que cada miembro tenga a los sumo un enemigo en su sala.

**Solución.**

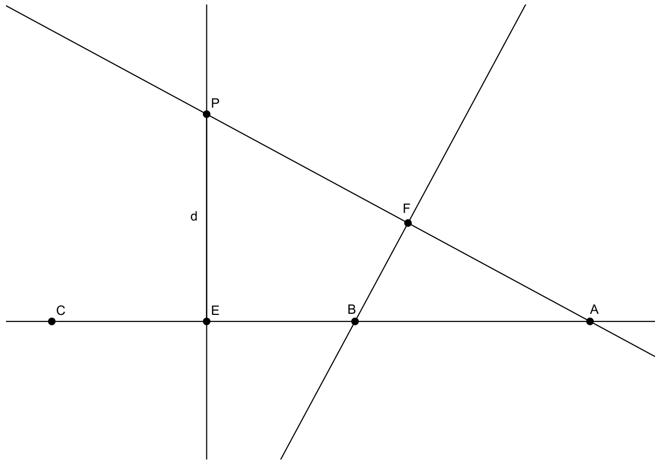
Consideremos todas las posibles particiones del parlamento en dos salas. Para cada partición contamos el número total de enemigos $E$ que tiene cada miembro en su sala. La partición con $E$ mínimo tiene la propiedad requerida. En efecto, si algún miembro tuviese al menos dos enemigos en su sala, entonces tendrá un enemigo a lo sumo en la otra sala. Si cambiamos a esta persona de sala disminuiría $E$, lo cual es una contradicción.

**Problema 2.** Un conjunto finito de puntos en el plano tiene la propiedad de que cualquier recta que pasa por dos de ellos pasa por un tercero. Probar que todos los puntos están en una recta.

**Solución.**

Sea $S$ un conjunto con la propiedad dada. Si $S$ tiene tres puntos es trivial. Supongamos que $S$ tiene más de tres puntos y que éstos no están alineados. Entre los pares $(P,r)$ que constan de una recta $r$ que pasa por dos puntos de $S$ y un punto $P$ de $S$ que no pertenece a esa recta, elijamos el par con distancia mínima $d$ entre $P$ y $r$. Sea $E$ el pie de la perpendicular a $r$ por $P$ ($E$ no tiene por qué pertenecer a $S$). Como $r$ pasa por dos puntos de $S$, digamos $A$ y $B$, pasa por un tercero, $C$. Entonces dos de ellos, digamos $A$ y $B$, están al mismo lado respecto a $E$. Supongamos que $B$ está más cerca de $E$ que $A$ (puede ser $B \equiv E$). Sea $F$ el pie de la recta perpendicular a $AP$ por $B$. Como $\triangle ABF \sim \triangle APE$, tenemos que $BF = PE \cdot \frac{AB}{AP} < PE = d$. Entonces la distancia de $B$ a la recta $AP$ es menor que $d$. Contradicción.

Este último problema, llamado *El problema de Sylvester*, fue propuesto por Sylvester en 1893. T.Gallai lo resolvió en 1933 de una forma muy complicada, mientras que L.M.Kelly lo resolvió en 1948 usando la solución que hemos presentado.



# PRINCIPIO DE DIRICHLET O DEL PALOMAR

Este teorema surge originariamente de la observación de que si posees un numero de palomas superior al numero de nidos en los que deben ser colocadas, en un nido tendrá que haber al menos 2 palomas.

De manera más general este principio se puede enunciar diciendo que si tienes n elementos que quieres repartir en m grupos, tendremos:

$$n=cm+r$$

Siendo c el cociente de la división y r el resto (r distinto de cero), entonces se puede concluir que en uno de los grupos habrá al menos c+1 elementos.

Ejemplo:

La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demostrar que podrías haber elegido al menos a 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuese menor que 51 años. (Fase local 2004)

Solución:

Podemos aplicar el principio del palomar de la siguiente manera.

Dividimos a los 120 estudiantes en 40 grupos de 3 personas, si dividimos la suma de las edades por los 40 grupos obtenemos:

$$2002=40 \times 50 + 2$$

Por el principio del palomar habrá al menos un grupo cuya suma de las edades de sus tres miembros sea c+1, como en este caso c=50, habrá un grupo tal que la suma de las edades de sus miembros sea al menos 51, con lo que se prueba lo que se pedía (existe un grupo tal que la suma de las edades de sus miembros no es menor que 51).

# COLORACIÓN

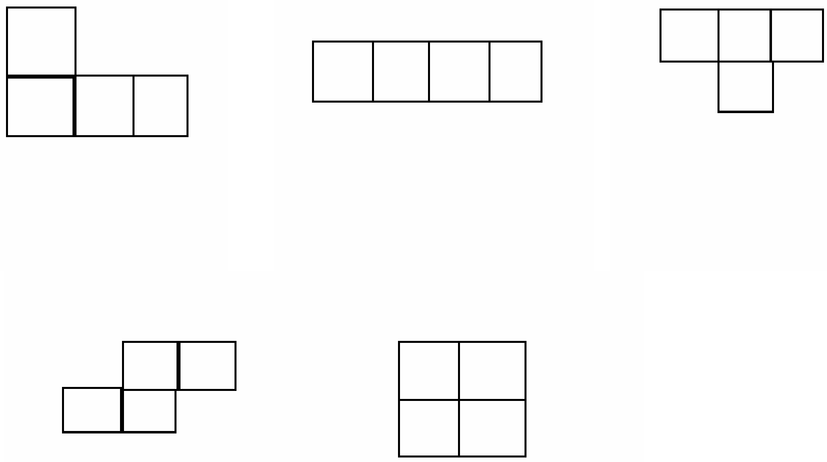
Existe una serie de problemas que se pueden resolver rápidamente utilizando como criterio la coloración.

Esto significa que para resolver el problema debemos dividirlo en varios subconjuntos y “colorear” cada uno de ellos.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo:

¿Es posible construir un rectángulo utilizando las siguientes piezas?



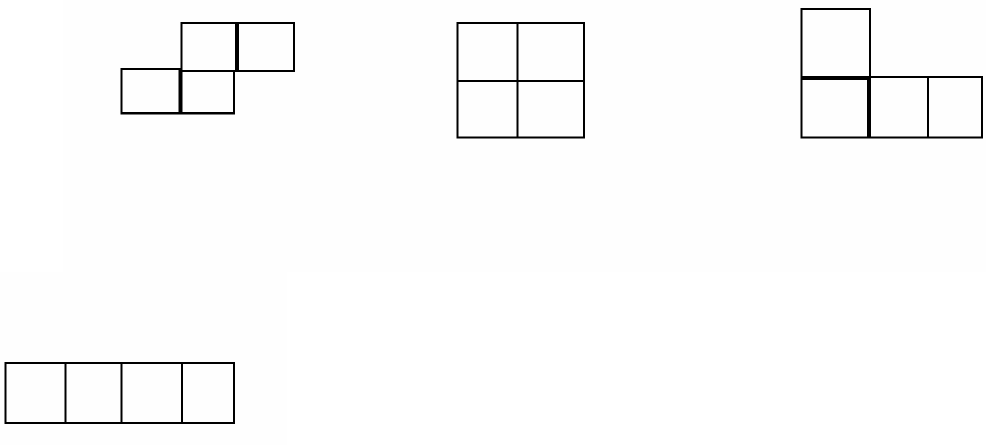
Solución:

Primero observemos que el número total de cuadrados de las piezas es de 20 cuadrados.

Ahora colorearemos los cuadrados de las piezas de dos colores de modo análogo a la forma en la que está coloreado un ajedrez, esto es, dado un cuadrado determinado aquellos adyacentes a él serán de distinto color si son adyacentes en horizontal o vertical y del mismo color si lo son en diagonal.

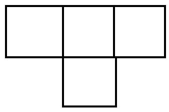
De esta manera si existiese el rectángulo al tener un numero par de cuadrados (20) tendría que tener la mitad de los cuadrados de cada color.

Si analizamos las piezas tenemos que en las siguientes piezas:



De los cuatro cuadrados que tiene cada pieza tendrían dos de un color y dos del otro.

Sin embargo, en la otra pieza:



Tendrá tres cuadrados de un color y uno del otro.

De este modo, al juntar las piezas tendríamos 11 cuadrados de un color y 9 del otro, por lo tanto no puede formarse un rectángulo con ellas.