

# ¿CÓMO LAS MATEMÁTICAS AYUDAN A TOMAR (buenas !) DECISIONES?

Taller de talento matemático

Carole Percier

Marzo 2010

## 1 Introducción

## 2 Modelización

- ¿Qué es un modelo ?
- ¿Por qué utilizar modelos ?
- Creación de un modelo

## 3 Programación lineal

- Un objetivo VS. unas restricciones
- Encontrar la solución óptima
- Planificación de tareas
- Problemas típicos

## 4 Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

- Métodos exactos VS. Métodos heurísticos
- Decisión e incertidumbre
- Decisión multi-criterios

## 5 Conclusión

# Introducción

Las matemáticas en las organizaciones

Tantas matemáticas : ¿¿**PARA QUÉ ??**

# Introducción

Las matemáticas en las organizaciones

Tantas matemáticas : *¿¿PARA QUÉ??*

- Poder calcular a qué distancia estás de la Torre Eiffel cuando la miras a 1,70m del suelo con un ángulo de  $30^\circ$

# Introducción

Las matemáticas en las organizaciones

Tantas matemáticas : *¿¿PARA QUÉ??*

- Poder calcular a qué distancia estás de la Torre Eiffel cuando la miras a 1,70m del suelo con un ángulo de  $30^\circ$
- Saber cuántas baldosas tienes que utilizar para pavimentar tu cocina de 5,85m  $\times$  3,35m

# Introducción

## Las matemáticas en las organizaciones

Tantas matemáticas : ¿¿**PARA QUÉ ??**

- Poder calcular a qué distancia estás de la Torre Eiffel cuando la miras a 1,70m del suelo con un ángulo de  $30^\circ$
- Saber cuántas baldosas tienes que utilizar para pavimentar tu cocina de 5,85m  $\times$  3,35m
- "Desarrollar tu capacidad de reflexión, de razonamiento y poder participar en conversaciones mundanas con mucho estilo"
- ...

# Introducción

Las matemáticas en las organizaciones

Y, en concreto... ¿¿**UTILIDAD REAL**??

# Introducción

Las matemáticas en las organizaciones

Y, en concreto... ¿¿**UTILIDAD REAL**??

- Cálculo de costes
- Precio de venta de productos
- Gestión y organización del personal
- Planificación de tareas
- etc.

# Introducción

Las matemáticas en las organizaciones

Y, en concreto... ¿¿**UTILIDAD REAL** ??

- Cálculo de costes
- Precio de venta de productos
- Gestión y organización del personal
- Planificación de tareas
- etc.

⇒ **Rentabilidad** (o, por lo menos, supervivencia...) **de una organización**

# Introducción

Las matemáticas en las organizaciones

## El deber de los logísticos :

“El buen producto, en el buen sitio, en el buen momento.”

¿Tan fácil ?

Ej.

Un supermercado propone entre 50 000 y 80 000 referencias de productos. Auchan (el Al Campo francés) trata con más de 7 000 proveedores distintos, en todo el país. Las exigencias de los clientes no son constantes, la meteorología no se controla, etc.

¿Cómo, en estas condiciones, traer la mercancía en las filas del supermercado en los mejores plazos ?

- ¿Qué optimizar ?
- ¿Qué tener en cuenta ?
- RESOLVER!!!!!!!!!!!!!!

## 1 Introducción

## 2 Modelización

- ¿Qué es un modelo ?
- ¿Por qué utilizar modelos ?
- Creación de un modelo

## 3 Programación lineal

- Un objetivo VS. unas restricciones
- Encontrar la solución óptima
- Planificación de tareas
- Problemas típicos

## 4 Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

- Métodos exactos VS. Métodos heurísticos
- Decisión e incertidumbre
- Decisión multi-criterios

## 5 Conclusión

# Modelización

¿Qué es un modelo ?

## Def.

Traducción teórica de una situación, de un objeto o de una estructura real y de su funcionamiento.

## Ej.

- Contabilidad de una empresa
- Modelización de una ola
- Mapa de meteorología
- Un ratón
- Una epidemia
- Una cola de espera
- ...

¿Sinónimo : **teoría** ?

# Modelización

¿Qué es un modelo?

## Def.

Traducción teórica de una situación, de un objeto o de una estructura real y de su funcionamiento.

## Ej.

- Contabilidad de una empresa
- Modelización de una ola
- Mapa de meteorología
- Un ratón
- Una epidemia
- Una cola de espera
- ...

*¿Sinónimo : teoría?*

Para modelar una situación, hay que tener en cuenta cual es el **objetivo** del problema.

# Modelización

¿Qué es un modelo?

- **Multiplicidad de los objetivos :**

Una situación / objeto / estructura  $\implies$  Varios objetivos posibles

Ej.

Un hospital  $\implies$  {  
Disminuir las colas del servicio de emergencias  
Mejorar la distribución del material  
Organizar la ocupación del quirófano  
Planificar las guardias  
Lavar la ropa de cama  
...

# Modelización

¿Qué es un modelo?

- **Multiplicidad de los objetivos :**

Una situación / objeto / estructura  $\implies$  Varios objetivos posibles

Ej.

Un hospital  $\implies$  {  
Disminuir las colas del servicio de emergencias  
Mejorar la distribución del material  
Organizar la ocupación del quirófano  
Planificar las guardias  
Lavar la ropa de cama  
...

- **Multiplicidad de los modelos :**

Un objetivo  $\implies$  Varios modelos

# Modelización

¿Qué es un modelo?

## Tipos de modelos :

- Modelo predictivo : **anticipar** la realidad y **decidir**
  - ▶ meteo,
  - ▶ enfermedades,
  - ▶ bolsa ...

# Modelización

¿Qué es un modelo ?

## Tipos de modelos :

- Modelo predictivo : **anticipar** la realidad y **decidir**
  - ▶ meteo,
  - ▶ enfermedades,
  - ▶ bolsa ...
- Modelo descriptivo : **observar y explicar** la realidad
  - ▶ verificar una teoría establecida,
  - ▶ funcionamiento de una máquina,
  - ▶ libro de cuentas ...

# Modelización

¿Qué es un modelo ?

## Tipos de modelos :

- Modelo predictivo : **anticipar** la realidad y **decidir**
  - ▶ meteo,
  - ▶ enfermedades,
  - ▶ bolsa ...
- Modelo descriptivo : **observar y explicar** la realidad
  - ▶ verificar una teoría establecida,
  - ▶ funcionamiento de una máquina,
  - ▶ libro de cuentas ...

*Modelo predictivo* ↔ *Modelo descriptivo*

# Modelización

¿Por qué utilizar modelos ?

Una organización  $\rightarrow$  un funcionamiento  $\rightarrow$  unos problemas  $\rightarrow$  unas decisiones

**Objetivo de la organización** : un funcionamiento **óptimo**

- utilización de recursos,
- determinación de precios,
- planificación. . .

**Dificultad** : ¿cuál es la mejor decisión ?

- Tema de debate
- Variedad de opiniones
- Problema poco formalizado
- Omisión de detalles

# Modelización

¿Por qué utilizar modelos ?

## El modelo...

- ... es objetivo
- ... estructura el problema
- ... formaliza la realidad
- ... permite sintetizar un fenómeno global
- ... hace intervenir herramientas genéricas

# Modelización

¿Por qué utilizar modelos ?

## El modelo...

- ... es objetivo
- ... estructura el problema
- ... formaliza la realidad
- ... permite sintetizar un fenómeno global
- ... hace intervenir herramientas genéricas

## Límites :

- Un modelo no es asequible a todo el mundo
- ¿Demasiada globalización ?

# Modelización

¿Por qué utilizar modelos?

## ***¿Posibilidad de generalizar algunos problemas para reutilizar modelos genéricos?***

Modelar  $\rightarrow$  Tiempo  $\rightarrow$  Dinero

- Similitudes entre varios problemas
- Utilización de un modelo base
- Adaptación a cada situación

$\Rightarrow$  Ahorro de tiempo y de dinero

# Modelización

Creación de un modelo

**Desarrollo de un modelo :**

# Modelización

Creación de un modelo

## Desarrollo de un modelo :

- 1 Formular la pregunta

# Modelización

## Creación de un modelo

### Desarrollo de un modelo :

- 1 Formular la pregunta
- 2 Limitar el campo de estudio del problema :
  - ▶ Identificar los datos esenciales y eliminar los parásitos
  - ▶ Tener en cuenta los medios disponibles
  - ▶ Definir que tipo de modelo se va a utilizar

# Modelización

## Creación de un modelo

### Desarrollo de un modelo :

- 1 Formular la pregunta
- 2 Limitar el campo de estudio del problema :
  - ▶ Identificar los datos esenciales y eliminar los parásitos
  - ▶ Tener en cuenta los medios disponibles
  - ▶ Definir que tipo de modelo se va a utilizar
- 3 Construir el modelo : recoger y filtrar datos  
⇒ **Obtención del modelo** : un conjunto de reglas, ecuaciones, grafos

# Modelización

## Creación de un modelo

### Desarrollo de un modelo :

- 1 Formular la pregunta
- 2 Limitar el campo de estudio del problema :
  - ▶ Identificar los datos esenciales y eliminar los parásitos
  - ▶ Tener en cuenta los medios disponibles
  - ▶ Definir que tipo de modelo se va a utilizar
- 3 Construir el modelo : recoger y filtrar datos  
⇒ **Obtención del modelo** : un conjunto de reglas, ecuaciones, grafos
- 4 Validar el modelo

# Modelización

Creación de un modelo

## El modelo (casi) perfecto...

- Tiene en en cuenta todo el problema real

C.Ej.

Modelar la economía de la Edad Media sin tener en cuenta el trueque...

# Modelización

Creación de un modelo

## El modelo (casi) perfecto...

- Tiene en en cuenta todo el problema real

C.Ej.

Modelar la economía de la Edad Media sin tener en cuenta el trueque...

- Permite obtener los resultados deseados en el plazo deseado

C.Ej.

Un modelo de previsiones meteorológicas para una semana super preciso, que necesita un mes de cálculos...

# Modelización

## Creación de un modelo

### El modelo (casi) perfecto...

- Tiene en en cuenta todo el problema real

#### C.Ej.

Modelar la economía de la Edad Media sin tener en cuenta el trueque...

- Permite obtener los resultados deseados en el plazo deseado

#### C.Ej.

Un modelo de previsiones meteorológicas para una semana super preciso, que necesita un mes de cálculos...

- Es todavía mejor si se puede **reutilizar** (\$ \$ \$ \$)

# Modelización

## Creación de un modelo

Ej.

En una consulta médica, el médico se ha dado cuenta que bastantes pacientes no acudían a su cita. Por tanto, se está planteando si empezar a citar varios pacientes al mismo tiempo para evitar quedarse sin atender a nadie (y, por tanto, no ganar tanto dinero como lo que podría . . . ).

# Modelización

## Creación de un modelo

Ej.

Un ebanista tiene cuatro pedidos pendientes para el mes que acaba de empezar :

- una mesa,
- 6 sillas,
- un aparador,
- una cómoda.

Cada uno de sus clientes le ha impuesto una fecha límite de entrega, por encima de la cual el ebanista tendría que bajar el precio de sus muebles si tuviera retraso. El pobre ebanista trabaja solo, aunque cabe la posibilidad, en caso extremo, de decir a su primo que venga a ayudarlo.

## 1 Introducción

## 2 Modelización

- ¿Qué es un modelo ?
- ¿Por qué utilizar modelos ?
- Creación de un modelo

## 3 Programación lineal

- Un objetivo VS. unas restricciones
- Encontrar la solución óptima
- Planificación de tareas
- Problemas típicos

## 4 Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

- Métodos exactos VS. Métodos heurísticos
- Decisión e incertidumbre
- Decisión multi-criterios

## 5 Conclusión

# Programación lineal

Un objetivo VS. unas restricciones

## ¿Qué es ?

La P.L. es una rama de la *Investigación Operativa* que permite **modelar** y **resolver** problemas de optimización.

## ¿En qué consiste ?

- Determinar cuales son las variables de decisión
- Determinar una función lineal que representa el objetivo que se trata de optimizar
- Determinar unas funciones lineales que representan las restricciones

## ¿Ventajas ?

- Resolución muy sencilla
- Adaptación a la mayoría de los problemas reales

$$\begin{aligned} \max \text{ ou } \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \forall i = 1 \dots m : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_i \\ \forall j = 1 \dots n : x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

# Programación lineal

Un objetivo VS. unas restricciones

Ej.

Una empresa acaba de firmar un contrato con el ayuntamiento para el tratamiento de los residuos reciclables : papel, plástico, vidrio.

Sus instalaciones le permiten tratar como máximo :

- 4 toneladas /hora de papel,
- 2 toneladas /hora de plástico,
- 1 tonelada /hora de vidrio.

Su capacidad total de tratamiento es de 5 toneladas de residuos por hora.

El tratamiento del papel le hace ganar 100€ por tonelada, el del plástico 300€ por tonelada y el del vidrio 200€ por tonelada.

La empresa quiere determinar que cantidad de residuos de cada tipo tiene que tratar por hora para obtener un beneficio máximo.

# Programación lineal

Un objetivo VS. unas restricciones

Ej.

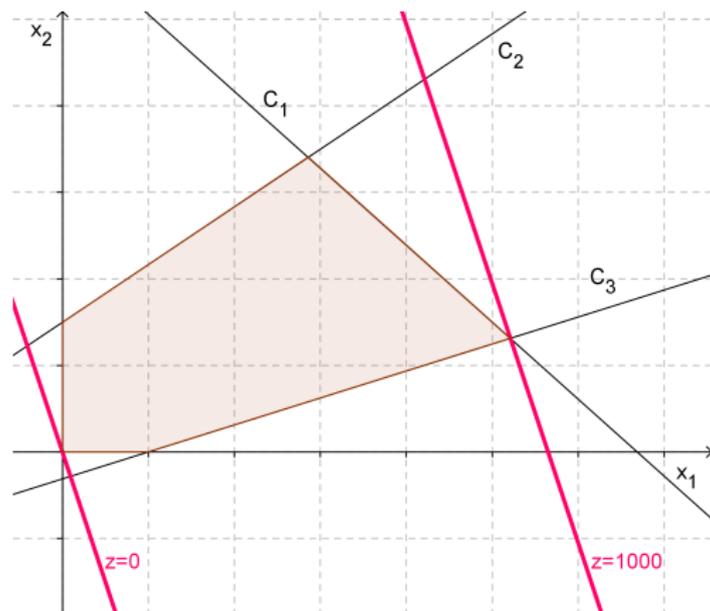
Una papelera desea mejorar su proceso de fabricación. El papel utilizado está definido por su ancho y su gramaje. La máquina que fabrica el papel funciona 24h/24. Durante los cambios de papel, es necesario hacer algunas modificaciones y además, los primeros metros de papel no se pueden vender. Se representan estos dos eventos por un coste global para la empresa. La empresa dispone del calendario de las fechas de llegada de las materias primas, y de las fechas de entrega de los pedidos de los clientes.

# Programación lineal

Encontrar la solución óptima

## Resolución gráfica :

- 1 Limitar la zona de las soluciones realizables : restricciones
- 2 Buscar la solución óptima : función objetivo



# Programación lineal

Encontrar la solución óptima

## Resolución gráfica :

- 1 Limitar la zona de las soluciones realizables : restricciones
- 2 Buscar la solución óptima : función objetivo

## Resolución algébrica :

- Aplicación del algoritmo del *simplex*

# Programación lineal

Encontrar la solución óptima

Ej.

Una fábrica produce dos tipos de productos : el producto  $A$  y el producto  $B$ . El modelo  $A$  exige 2kg de materia prima, necesita 30 horas de fabricación y da un beneficio de 7€. El producto  $B$  exige 4kg de materia prima, necesita 15 horas de fabricación y da un beneficio de 6€. Se dispone de 200kg de materia prima y de 1200 horas de trabajo. ¿Cómo organizar la producción para obtener un beneficio máximo ?

# Programación lineal

Encontrar la solución óptima

Ej.

En la fabricación de frigoríficos de tipo  $A+$  y  $A++$  se pueden utilizar dos tipos de máquinas-robots :  $M_1$  y  $M_2$ . Cada unidad de la máquina  $M_1$  tiene un coste de 2000€y cada unidad de la máquina  $M_2$  tiene un coste de 3000€.

La tabla siguiente muestra las unidades que se pueden obtener, en un cierto período de tiempo, de frigoríficos  $A+$  y  $A++$  tanto en la máquina  $M_1$  como en la  $M_2$  :

	$A+$	$A++$
$M_1$	2	3
$M_2$	1	3

En este período, se deben producir al menos 11 frigoríficos  $A+$  y 24  $A++$ .

La empresa que proporciona las máquinas no considera pedidos con menos de dos unidades de la  $M_1$  y con menos de tres unidades de la  $M_2$ . Además, por razones de transporte, el número de unidades de  $M_2$  debe ser superior al de  $M_1$ .

¿Cuántas máquinas de cada tipo la empresa tendría que adquirir ?

# Programación lineal

## Planificación de tareas

### Planteamiento del problema :

Planificar unas tareas teniendo en cuenta :

- el número de recursos disponibles y su organización
- tiempos de realización
- fechas de disponibilidad
- fechas límites

Los objetivos pueden variar :

- Minimizar el tiempo total de realización de todas las tareas
- Minimizar el número de tareas en espera
- Minimizar la cantidad de recursos utilizados
- ...

# Programación lineal

## Planificación de tareas

Ej.

Se considera un aeropuerto con un número determinado de puertas de embarque. Los aviones llegan y se van según un horario establecido. Cuando un avión está por llegar, se le debe asignar una puerta adecuada tanto para los pasajeros como para el personal. Algunas puertas pueden ser asignadas únicamente a aviones pequeños.

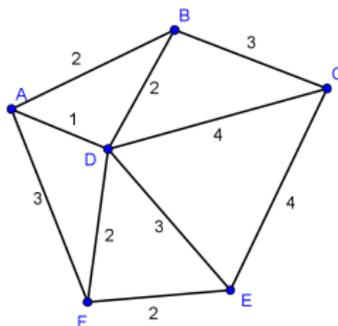
- ¿Recursos ?
- ¿Restricciones ?
- ¿Objetivo ?

# Programación lineal

## Problemas típicos

### Problema del viajante de negocios - TSP

Un viajante de negocios tiene que ir a visitar todos sus clientes, en un recorrido de distancia mínima, y volver a su punto de partida.

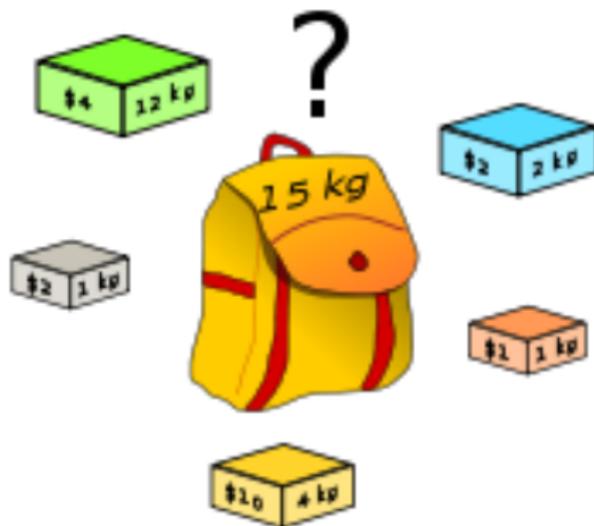


# Programación lineal

## Problemas típicos

### Problema de la mochila

Mi mochila no puede soportar más que  $W$  kilos. Tengo  $n$  objetos, cada uno pesa  $w_i$  kilos y tiene un valor de  $p_i$  euros. ¿Qué objetos elegir para llevar conmigo un conjunto de objetos que tiene un valor lo más alto posible, pero no sobrepasa el peso límite ?



# Programación lineal

## Problemas típicos

### Problema de transporte

Una empresa dispone de :

- $m$  fábricas, cada uno produce  $a_i$  productos,
- $n$  almacenes, cada uno necesita  $b_j$  productos.

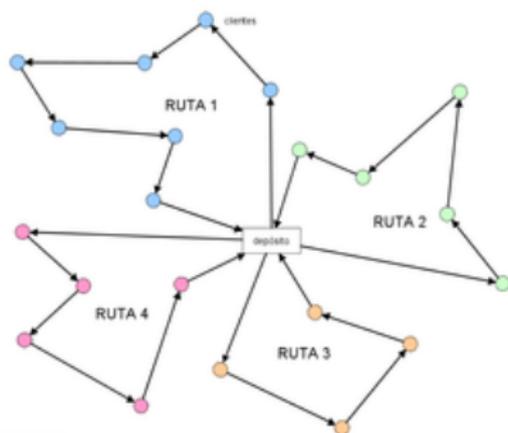
¿Qué cantidad de productos de la empresa  $i$  mandar al almacén  $j$ ?

# Programación lineal

## Problemas típicos

### Problema del ruteo de vehículos - VRP

Una flota de vehículos tiene que pasar a dar servicios a todos sus clientes, con un coste mínimo.



## 1 Introducción

## 2 Modelización

- ¿Qué es un modelo ?
- ¿Por qué utilizar modelos ?
- Creación de un modelo

## 3 Programación lineal

- Un objetivo VS. unas restricciones
- Encontrar la solución óptima
- Planificación de tareas
- Problemas típicos

## 4 Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

- Métodos exactos VS. Métodos heurísticos
- Decisión e incertidumbre
- Decisión multi-criterios

## 5 Conclusión

# Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

## Métodos exactos VS. Métodos heurísticos

- Problema del viajante
- Problema de la mochila
- Problema de transporte
- Problema de ruteo
- ...

→ Problemas difíciles

⇒ Imposibilidad de resolverlos de manera exacta

⇒ Utilización de **métodos heurísticos**

# Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

Métodos exactos VS. Métodos heurísticos

## Def.

Una heurística es un algoritmo que permite encontrar rápidamente una solución factible pero no necesariamente óptima a un problema de optimización “NP-difícil”.

## Dificultad :

Modelización + Algoritmo**S** + Comparación de resultados

# Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

## Decisión e incertidumbre

Riesgos en la organización :

- Máquina averiada, personal enfermo,
- proveedor con retraso,
- inestabilidad de la población, fiabilidad de los clientes
- ...

⇒ INCERTIDUMBRE EN LA DECISIÓN : no podemos prever lo que va a pasar...

⇒ Utilización de la estadística y de la probabilidad

# Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

## Decisión e incertidumbre

- Simulación
- Programación estocástica
- Procesos de decisiones Markovianos

## Aplicaciones :

- Filas de espera → muchas aplicaciones en el ámbito de la salud
- Gestión de los stocks
- Mantenimiento de máquinas

Ej.

Dada la aumentación del número de pacientes que no acuden a una cita, un médico se plantea si empezar a citar varios pacientes a la vez (overbooking). Buscar una manera de ayudarle a tomar su decisión.

# Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

## Decisión multi-criterios

### **Objetivo :**

Construir un modelo de decisión basándose en distintos puntos de vista y utilizar el modelo sobre distintas alternativas.

Ej.

Se trata de planificar una ruta turística :

- $N$  días
- $N$  ciudades
- 2 actividades al día en cada ciudad
- hoteles de distintas categorías

Restricciones :

- Distancia máxima entre 2 ciudades consecutivas
- Distancia máxima total

Objetivos ???

## 1 Introducción

## 2 Modelización

- ¿Qué es un modelo ?
- ¿Por qué utilizar modelos ?
- Creación de un modelo

## 3 Programación lineal

- Un objetivo VS. unas restricciones
- Encontrar la solución óptima
- Planificación de tareas
- Problemas típicos

## 4 Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

- Métodos exactos VS. Métodos heurísticos
- Decisión e incertidumbre
- Decisión multi-criterios

## 5 Conclusión

# Conclusión

Todo esto...¿para qué?

Pocas empresas disponen de matemáticos que desarrollan modelos exclusivamente para ellas (pero existen). Sin embargo, algunas empresas y centros de investigación se dedican exclusivamente a esto :

# Conclusión

Todo esto...¿para qué?

Pocas empresas disponen de matemáticos que desarrollan modelos exclusivamente para ellas (pero existen). Sin embargo, algunas empresas y centros de investigación se dedican exclusivamente a esto :

- Softwares que incluyen muchos de estos modelos (tipo SAP)

# Conclusión

Todo esto...¿para qué?

Pocas empresas disponen de matemáticos que desarrollan modelos exclusivamente para ellas (pero existen). Sin embargo, algunas empresas y centros de investigación se dedican exclusivamente a esto :

- Softwares que incluyen muchos de estos modelos (tipo SAP)
- Consulting en empresas

# Conclusión

Todo esto...¿para qué?

Pocas empresas disponen de matemáticos que desarrollan modelos exclusivamente para ellas (pero existen). Sin embargo, algunas empresas y centros de investigación se dedican exclusivamente a esto :

- Softwares que incluyen muchos de estos modelos (tipo SAP)
- Consulting en empresas
- Investigación en el ámbito de la investigación operativa y de la modelización : necesita aplicaciones → las empresas