JUEGOS CON MONEDAS

Taller de Talento Matemático, Bachillerato

Antonio M. Oller
José María Muñoz

21 de mayo de 2010

Introducción

MATEMÁTICAS

Introducción

MATEMÁTICAS

Aritmética - Combinatoria - Geometría - Análisis - Álgebra

Introducción

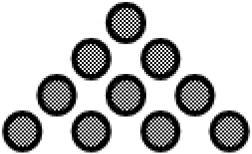
Aritmética - Combinatoria - Geometría - Análisis - Álgebra

Triángulos
Número triangular
Progresión aritmética
Parámetros y variables
Función aritmética
Optimización

Vértices
Parte entera
Dominio de definición
Derivada
Números pares e impares
Divisibilidad por 3

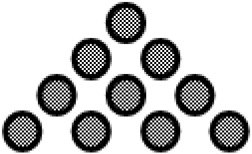
Primer caso particular

Con 10 fichas formamos un triángulo como el de la figura



Primer caso particular

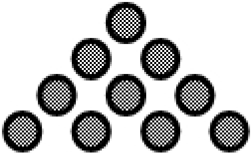
Con 10 fichas formamos un triángulo como el de la figura



¿Cuál es el menor número de fichas que hay que mover para que el triángulo quede invertido?

Primer caso particular

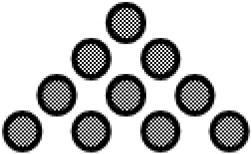
Con 10 fichas formamos un triángulo como el de la figura



¿Cuál es el menor número de fichas que hay que mover para que el triángulo quede **invertido**?

Primer caso particular

Con 10 fichas formamos un triángulo como el de la figura



¿Cuál es el menor número de fichas que hay que mover para que el triángulo quede **invertido**?

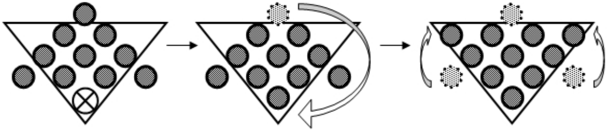
CONDICIÓN ADICIONAL: el nuevo vértice inferior debe estar sobre el eje de simetría del triángulo

Solución para el primer caso particular

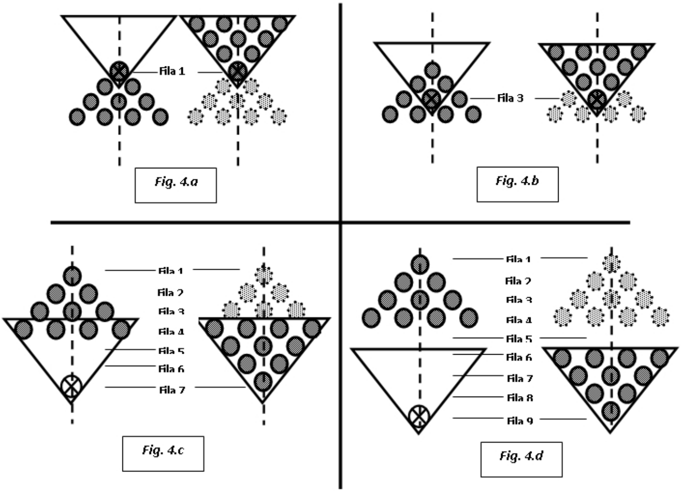
Hemos visto que el número de movimientos necesario es ≤ 3.
¿Cómo demostrar la igualdad?

Solución para el primer caso particular

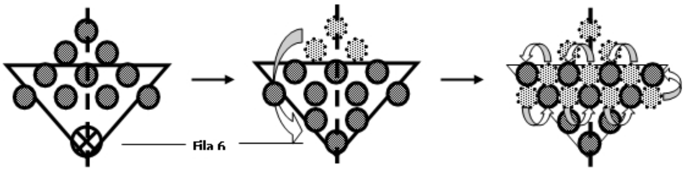
Hemos visto que el número de movimientos necesario es ≤ 3.
¿Cómo demostrar la igualdad?



Solución para el primer caso particular



Solución para el primer caso particular



La pregunta general

Supongamos que tenemos un triángulo cualquiera con n filas. ¿Cuál será el mínimo numero de fichas que hay que mover para invertir el triángulo? ¿Qué movimientos habrá que efectuar?

La pregunta general

Supongamos que tenemos un triángulo cualquiera con n filas. ¿Cuál será el mínimo numero de fichas que hay que mover para invertir el triángulo? ¿Qué movimientos habrá que efectuar?

Ya sabemos que:

Número de filas	2	3	4
Número de movimientos	1	2	3

La pregunta general

Supongamos que tenemos un triángulo cualquiera con n filas. ¿Cuál será el mínimo numero de fichas que hay que mover para invertir el triángulo? ¿Qué movimientos habrá que efectuar?

Ya sabemos que:

Número de filas	2	3	4
Número de movimientos	1	2	3

¿Qué pasará para $n = 5$? ¿Y para $n = 6$?

La pregunta general

Antonio M. Oller
José María Muñoz

Supongamos que tenemos un triángulo cualquiera con n filas. ¿Cuál será el mínimo numero de fichas que hay que mover para invertir el triángulo? ¿Qué movimientos habrá que efectuar?

Ya sabemos que:

Número de filas	2	3	4
Número de movimientos	1	2	3

¿Qué pasará para $n = 5$? ¿Y para $n = 6$?
Son 5 y 7 movimientos, respectivamente.

La pregunta general

Supongamos que tenemos un triángulo cualquiera con n filas. ¿Cuál será el mínimo numero de fichas que hay que mover para invertir el triángulo? ¿Qué movimientos habrá que efectuar?

Ya sabemos que:

Número de filas	2	3	4
Número de movimientos	1	2	3

¿Qué pasará para $n = 5$? ¿Y para $n = 6$?
Son 5 y 7 movimientos, respectivamente.
¿Cuántas fichas hay en un triángulo de n filas?

La pregunta general

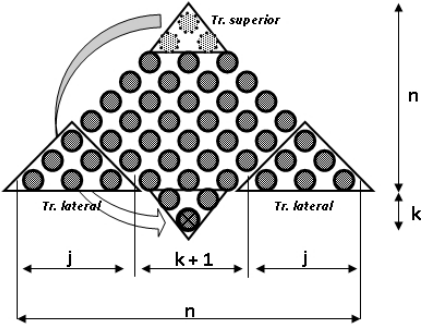
Supongamos que tenemos un triángulo cualquiera con n filas. ¿Cuál será el mínimo numero de fichas que hay que mover para invertir el triángulo? ¿Qué movimientos habrá que efectuar?

Ya sabemos que:

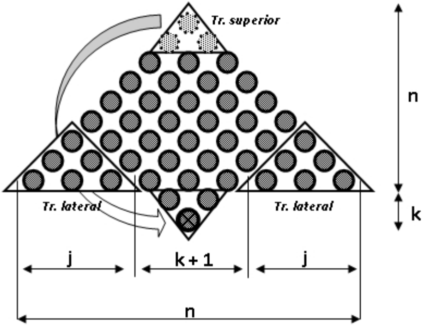
Número de filas	2	3	4
Número de movimientos	1	2	3

¿Qué pasará para $n = 5$? ¿Y para $n = 6$?
Son 5 y 7 movimientos, respectivamente.
¿Cuántas fichas hay en un triángulo de n filas?
Hay $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

El caso general

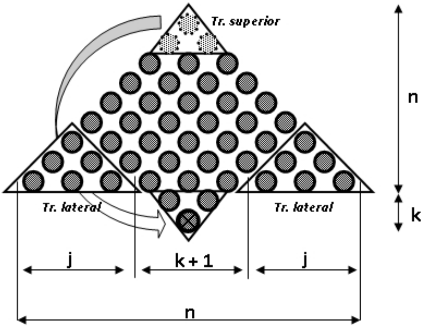


El caso general



Supongamos que el vértice del nuevo triángulo queda k filas por debajo de la base del original

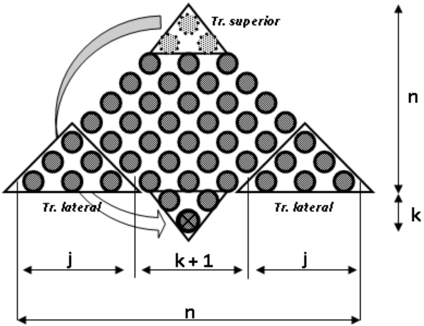
El caso general



Supongamos que el vértice del nuevo triángulo queda k filas por debajo de la base del original

Se cumple que $2j + (k + 1) = n$.

El caso general



Supongamos que el vértice del nuevo triángulo queda k filas por debajo de la base del original

Se cumple que $2j + (k + 1) = n$.

Los movimientos que hay que hacer en este caso son $T_k + 2T_j$.

Calculando los movimientos explicitamente

Hemos visto que si el vértice del nuevo triángulo queda colocado k filas por debajo de la base del triángulo original, entonces hay que hacer $T_k + 2T_j$ movimientos. Además se cumple que $2j + (k+1) = n$. Como sabemos calcular T_m para cualquier m, el número de movimientos será:

Calculando los movimientos explicitamente

Hemos visto que si el vértice del nuevo triángulo queda colocado k filas por debajo de la base del triángulo original, entonces hay que hacer $T_k + 2T_j$ movimientos. Además se cumple que $2j + (k+1) = n$. Como sabemos calcular T_m para cualquier m, el número de movimientos será:

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

Calculando los movimientos explicitamente

Hemos visto que si el vértice del nuevo triángulo queda colocado k filas por debajo de la base del triángulo original, entonces hay que hacer $T_k + 2T_j$ movimientos. Además se cumple que $2j + (k+1) = n$. Como sabemos calcular T_m para cualquier m, el número de movimientos será:

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

¡Ojo! aquí n es un parámetro fijo y la variable es k.

Dominios

Antonio M. Oller
José María Muñoz

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

Dominios

Antonio M. Oller
José María Muñoz

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

¿Cuál es el dominio de $f_n(k)$?

Dominios

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

¿Cuál es el dominio de $f_n(k)$?

$$\mathcal{D} = Dom(f_n(k)) =$$

Dominios

Antonio M. Oller
José María Muñoz

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

¿Cuál es el dominio de $f_n(k)$?

$$\mathcal{D} = Dom(f_n(k)) = \mathbb{Z}$$

Dominios

Antonio M. Oller
José María Muñoz

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

¿Cuál es el dominio de $f_n(k)$?

$$\mathcal{D} = Dom(f_n(k)) = \mathbb{Z} \cap [0, n)$$

Dominios

Antonio M. Oller
José María Muñoz

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

¿Cuál es el dominio de $f_n(k)$?

$$\mathcal{D} = Dom(f_n(k)) = \mathbb{Z} \cap [0, n) \cap \{k \mid k + n \text{ impar}\}.$$

Minimizando

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

Minimizando

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

$$f_n : \mathcal{D} \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Minimizando

Antonio M. Oller
José María Muñoz

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

$$f_n : \mathcal{D} \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

¿Cuál es el mínimo de $f_n(k)$?

Minimizando

$$f_n(k) = \frac{3k^2 + (2-2n)k + n^2 - 1}{4}.$$

$$f_n : \mathcal{D} \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

¿Cuál es el mínimo de $f_n(k)$?

Podemos definir

$$g_n(x) = \frac{3x^2 + (2-2n)x + n^2 - 1}{4},$$

$$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Minimizando

$$g_n(x) = \frac{3x^2 + (2-2n)x + n^2 - 1}{4},$$

$$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Minimizando

Antonio M. Oller
José María Muñoz

$$g_n(x) = \frac{3x^2 + (2-2n)x + n^2 - 1}{4},$$

$$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sabemos calcular el mínimo de g_n:

Minimizando

Antonio M. Oller
José María Muñoz

$$g_n(x) = \frac{3x^2 + (2-2n)x + n^2 - 1}{4},$$

$$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sabemos calcular el mínimo de g_n:

$$x_{min} = \frac{n-1}{3}$$

Minimizando

$$g_n(x) = \frac{3x^2 + (2-2n)x + n^2 - 1}{4},$$

$$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sabemos calcular el mínimo de g_n:

$$x_{min} = \frac{n-1}{3}$$

¿Coincide el mínimo de g_n con el mínimo de f_n?

Minimizando

$$g_n(x) = \frac{3x^2 + (2-2n)x + n^2 - 1}{4},$$

$$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sabemos calcular el mínimo de g_n:

$$x_{min} = \frac{n-1}{3}$$

¿Coincide el mínimo de g_n con el mínimo de f_n?

¿Cómo obtenemos el mínimo de f_n a partir del de g_n?

Minimizando

$$k_{min} = \begin{cases} \dfrac{n}{3} - 1 & si \;\; \text{n=3c.} \\ \dfrac{n-1}{3} & si \;\; \text{n=3c+1.} \\ \dfrac{n+1}{3} & si \;\; \text{n=3c+2.} \end{cases}$$

Pregunta final

¿QUÉ SUCEDERÍA SI NO PEDIMOS QUE EL VÉRTICE DEL NUEVO TRIÁNGULO ESTÉ SOBRE EL EJE DE SIMETRÍA DEL TRIÁNGULO ORIGINAL?

¡GRACIAS A TODOS!