Fractales. Geometría del caos.

José María Sorando
IES Elaios - Zaragoza

La geometría clásica, llamada Geometría Euclídea en honor del geómetra griego Euclides, se basa en rectas, curvas, polígonos, círculos, etc; formas sencillas con las que hemos construido nuestro mundo artificial. Pero la Naturaleza suele presentar formas mucho más complejas.

Una historia real

En 1919 un equipo de topógrafos realizaba estudios en la costa de Gran Bretaña. Observaron que la longitud de un sector de la accidentada costa era distinta según la escala con la que se observara. Al aumentar la escala aparecían nuevos detalles de la costa, se "complicaba", incrementando la longitud; a diferencia de las curvas tradicionales en que, cuanto más nos acercamos, se van pareciendo más a una recta.

Hay otras figuras que nos ofrecen nuevos detalles cuando aumentamos la escala: pensemos en una hoja de helecho. Viéndola a una distancia de 3 m, parece un triángulo. Al acercarnos a ella, aquella estructura simple deja de serlo. Ahora vemos que cada brote que sale de la rama principal, visto de cerca, es tan complejo como la hoja del principio. Lo mismo en una nube, etc. Cuando las nuevas estructuras que descubrimos resultan ser semejantes a la figura completa, se da el fenómeno que Benoît Mandelbrot llamó **autosemejanza**. Decía Mandelbrot: "Las nubes no son esferas; las montañas no son conos; los litorales no son círculos; los relámpagos no viajan en línea recta. He concebido una nueva geometría de la naturaleza: la **geometría fractal**".

Para definir qué es un objeto fractal, hay que empezar por revisar qué entendemos por dimensión.

Dimensiones

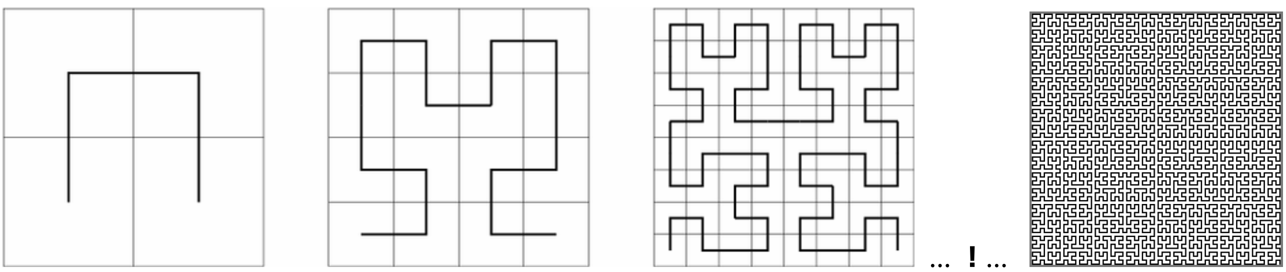
En la Geometría Euclídea, las formas están definidas por medidas de largo, ancho y alto; tienen dimensiones enteras: 1, 2 ó 3.

Ejemplos:
- una curva tiene longitud y decimos que su dimensión es 1: fijado un punto origen, cualquier otro punto de la curva se puede localizar con un número x.
- una superficie tiene área y decimos que su dimensión es 2: ocupa una zona del plano y, fijados unos ejes de coordenadas, en éste cada punto es localizable por un par ordenado de números (x , y).
- un cuerpo tiene volumen y decimos que su dimensión es 3: ocupa una zona del espacio y, fijados unos ejes de coordenadas, en éste cada punto es localizable por una terna de números (x , y , z).

Pero la aparición de algunos ejemplos sorprendentes, los llamados "monstruos matemáticos", hicieron tambalear las ideas anteriores a comienzos del siglo XX.

La Curva de Hilbert

Siempre se había considerado que una curva es la figura engendrara por el movimiento de un punto. En 1891, David Hilbert dio a conocer la siguiente familia de curvas continuas, que, en un proceso infinito de repeticiones aumentando su complejidad, en el límite, pasa por todos los puntos de un cuadrado, llenándolo. Entonces, ¿es una curva o es una superficie?; ¿cuál es su dimensión?



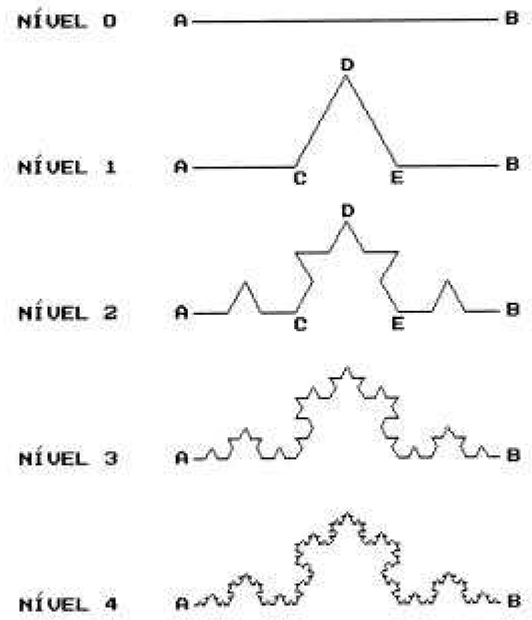
P_1 P_2 P_3 ... ! ... P_n

Iteraciones

Los procesos de iteración son aquellos que repiten los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior. De esa forma, un procedimiento sencillo puede dar lugar, en un proceso de iteración infinita, a un resultado final de gran complejidad, como vimos en la Curva de Hilbert.

La Curva de Koch

Se parte de un segmento AB (nivel 0) y lo dividimos en tres partes iguales. Eliminamos el tercio central, y levantamos un triángulo equilátero de lado 1/3 en el hueco (el triángulo no tendrá base, claro). Así llegamos al nivel 1, que consta de 4 segmentos.



A cada uno de esos 4 segmentos le aplicamos el proceso anterior y llegamos al nivel 2, con 16 segmentos.

Repitiendo infinitas veces el proceso con cada segmento se obtiene la curva de Koch. Si ampliamos la figura, aparecen detalles que no percibíamos al principio. Y si la volvemos a ampliar, aparecen más detalles, y de nuevo más... Es una figura que se repite en cada uno de sus trozos infinitas veces. Es autosemejante.

Aunque la distancia entre los puntos inicial A y final B sea finita, **la longitud de la Curva de Koch es infinita**.

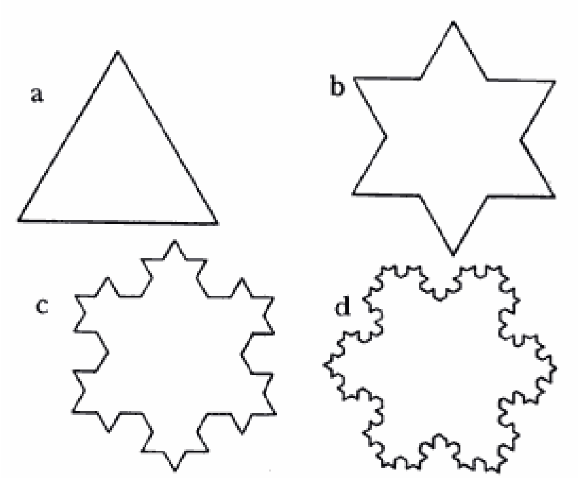
En efecto, si llamamos L_n a la longitud de la curva de nivel n:

$L_0 = AB$ $\qquad$ $L_1 = 4/3 \cdot AB$ $\qquad$ $L_2 = (4/3)^2 \cdot AB$ $\qquad$ ... $\qquad$ $L_n = (4/3)^n \cdot AB$

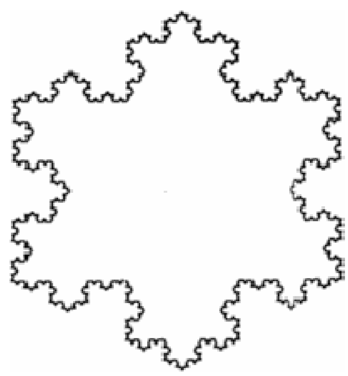
cuando n ! 4 ... $L = \lim L_n = \lim (4/3)^n \cdot AB =$ 4

La Curva "copo de nieve"

Se parte de un triángulo equilátero. Aplicamos a cada uno de sus tres lados el proceso iterativo de la Curva de Koch. **Este "copo de nieve" tiene una longitud infinita, ¡pero encierra un área finita!** (9/5, siendo 1 la longitud del lado del triángulo de partida).

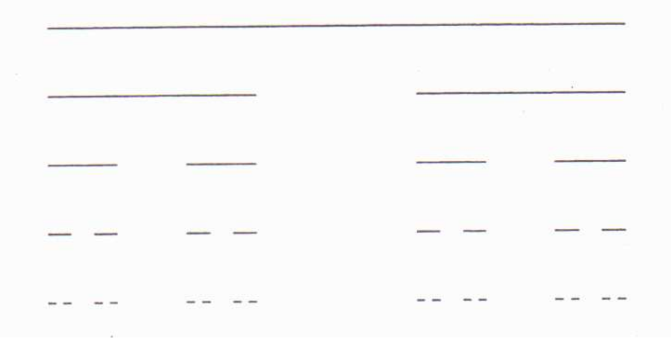


... ! ...



El Conjunto de Cantor.

Partimos del intervalo cerrado [0 , 1], lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos el intervalo central. Volvemos a dividir en tres partes iguales a cada uno de ellos y eliminamos de nuevo el intervalo central y así sucesivamente.



Ejercicio.-

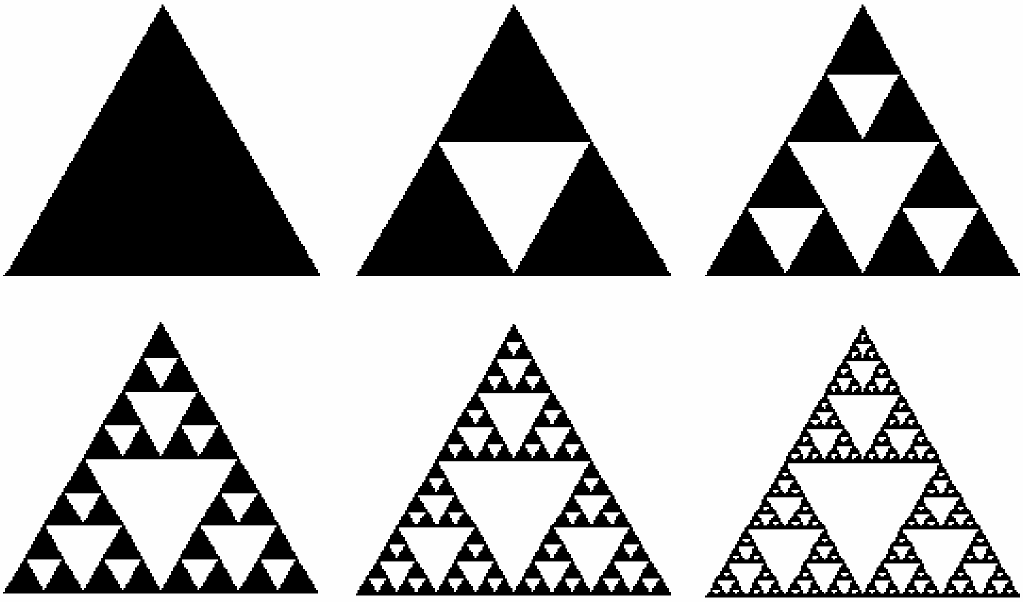
a) En la etapa n-ésima, cuántos intervalos habremos obtenido?. ¿Qué longitud tendrá cada uno de esos intervalos?. ¿Cuál es la longitud de todos los segmentos?.

b) Cuando el número de iteraciones sea infinito, ¿cuántos segmentos habrá? Y ¿cuál será la longitud de todos ellos?.

Así se obtiene el Conjunto de Cantor, que tiene .... puntos, pero es de longitud ....

El Triángulo de Sierpinski

En un triángulo equilátero se marcan los puntos medios de los lados, se unen formando cuatro triángulos iguales y quitamos el triángulo central. En cada uno de los tres nuevos triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente.



Ejercicio.-

a) En la etapa n-ésima, cuántos triángulos habremos obtenido?. ¿Qué longitud tendrá cada uno de los lados de esos triángulos? ¿Cuál es el perímetro de todos ellos? ¿Cuál es el área?

b) Cuando el número de iteraciones sea infinito, ¿cuántos triángulos habrá? ¿Cuál será su perímetro total? ¿Cuál será el área?

Así se obtiene el Triángulo de Sierpinski, que tiene un perímetro .... , pero tiene un área ....

Dimensión fractal

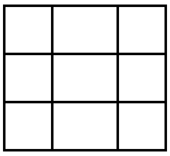
En los ejemplos precedentes hemos visto que hay curvas autosemejantes capaces de llenar superficies, mientras que otras lo consiguen en mayor o menor medida y, además, que esto guarda alguna relación con su "rugosidad"; también que, en algunas figuras autosemejantes, la relación entre perímetros y áreas llega a ser sorprendente. Para medir y clasificar estos casos, se desarrolló el concepto de dimensión fractal. Y se hizo empezando por figuras muy conocidas de la Geometría Euclídea, también autosemejantes, para desde ellas dar el paso a los citados "monstruos geométricos":

Tenemos una línea : _________

ahora la dividimos en tres partes iguales : 

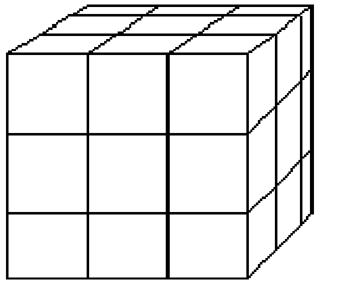
y de esas partes cogemos una cualquiera : ___

Este trozo de línea es, claramente, semejante a la línea original. Lo único que las distingue es un factor de escala 1/3 (una reducción a una tercera parte del tamaño original).



Hagamos lo mismo con un cuadrado:

Este cuadrado es semejante a cada uno de los 9 pequeños



Y ahora con un cubo. De nuevo, en esta figura cada uno de los cubitos que aparecen es semejante a la figura original.

Podíamos haber usado, en vez de un factor de escala 1/3; 1/2, 1/4, o, en general, 1/n, siendo n perteneciente a N* (N* = N - {0}). En cualquier caso, la figura obtenida es semejante a la figura original.

Vamos ahora a fijarnos en el siguiente hecho: cuando hemos dividido la línea, han quedado tres trozos semejantes a ella. Si yo ahora cojo uno de esos trozos, necesito exactamente 3 (3^1) para reconstruir la construcción original. En el caso del cuadrado, necesito 9 (3^2) trozos para reconstruir la figura original. Y, en el caso del cubo, necesito 27 (3^3) trozos para la reconstrucción del original. Es decir, se observa una relación entre la escala, el número de trozos en que divido la figura, y lo que (tradicionalmente) se conoce como dimensión del objeto. Esta relación se puede expresar de la siguiente forma:

$$n=\frac{1}{r^D}$$

donde n es el número de trozos en que dividimos la figura, r es la razón de escala, y D es la dimensión

En los ejemplos, tenemos que D = 1 para la línea, D = 2 para el cuadrado, y D = 3 para el cubo. Es decir, el exponente que aparece en la fórmula se corresponde con los valores que nos son conocidos de su dimensión. Ahora, cabe preguntarse: ¿y si tomamos otra escala? ¿Seguirá siendo válida la fórmula? Esta cuestión puede verse contestada en la siguiente tabla:

OBJETO	**N° PIEZAS**	**ESCALA**	**D (obtenido con la fórmula)**
LINEA	3	1/3	1
	2	1/2	1
	5	1/5	1
	....	....	...
	n	1/n	1
CUADRADO	9	1/3	2
	4	1/2	2
	25	1/5	2
	....	....	...
	n^2	1/n	2
CUBO	27	1/3	3
	8	1/2	3
	125	1/5	3
	....	....	...
	n^3	1/n	3

En la tabla vemos que la fórmula es consistente, sea cual sea la escala en la que dividamos nuestra figura.

Entonces, despejando D, definimos la dimensión fractal como:

$$\boxed{\mathbf{D = \log (1 / n) / \log r}}$$

<u>Ahora, aplicaremos esta definición a la Curva de Koch</u> que, al igual que el segmento, el cuadrado o el cubo, es autosemejante. Observamos que en el nivel 1 está compuesta de n = 4 trozos a escala r = 1/3 de la original. Pero en el nivel 2, son n = 16 trozos a escala r = 1/9 de la original. En general, en el nivel k está compuesta de $n = 4^k$ trozos a escala $r = (1/3)^k$ de la original.

En el nivel 1, obtenemos: D = log (1/4) / log (1/3) = log 4 / log 3 = 1,2619

D no es un número entero, y eso nos hace dudar de la validez de la fórmula, así que lo comprobamos en más casos.

En el nivel 2: D = log (1/16) / log (1/9) = log (16) / log (9) = 2 log 4 / 2 log 3 = log 4 / log 3 = 1,2619

En el nivel k: $D = \log (1/4^k) / \log (1/3)^k = \log 4^k / \log 3^k = k \log 4 / k \log 3 = \log 4 / \log 3 = 1{,}2619$

Este resultado es válido para cualquier valor de k. Es decir, la dimensión de la Curva de Koch es 1,2619.

Al tratarse de una dimensión decimal o fraccionaria, se adoptó el nombre de dimensión fractal.

<u>Ejercicio 2</u>.- Calcula la dimensión fractal de cada uno de estos conjuntos:

a) Conjunto de Cantor

nivel	r	n	D = log (1 / n) / log r

b) Triángulo de Sierpinski

nivel	r	n	D = log (1 / n) / log r

<u>Definición</u>.-

Objeto fractal es aquel cuya dimensión fractal es mayor que la dimensión euclídea

Revisemos los ejemplos conocidos:

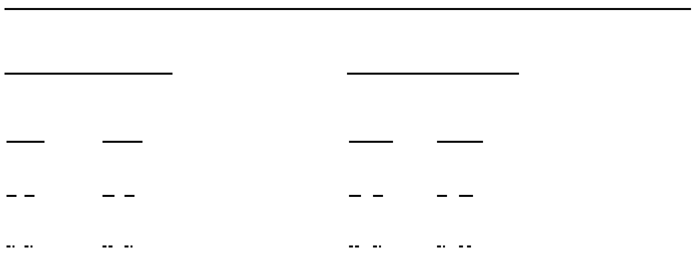
En la Curva de Koch, 1 < D < 2 , luego es un fractal (*es algo más que una curva, pero menos que un plano*).

En el Conjunto de Cantor, 0 < D < 1 , luego no es un fractal (*es algo más que un conjunto de puntos, pero menos que una curva*).

En el triángulo de Sierpinski, 1 < D < 2 , luego no es un fractal (*es algo más que un conjunto de rectas, pero menos que un plano*).

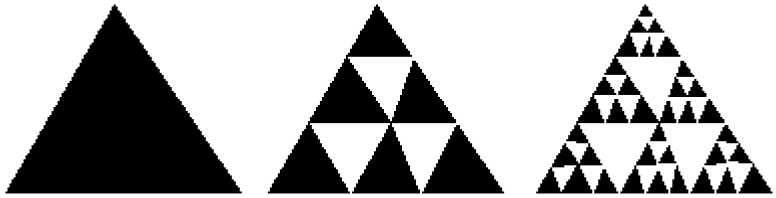
<u>Ejercicio 3</u>.- Calcula la dimensión fractal de cada uno de estos conjuntos y deduce entonces si son o no son fractales:

a) Variación del Conjunto de Cantor



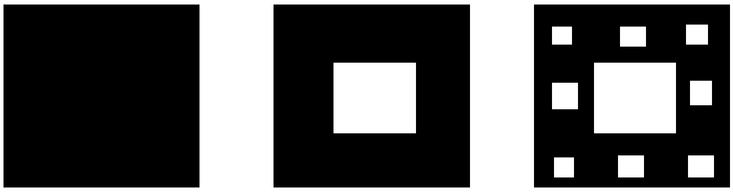
nivel	r	n	D = log (1 / n) / log r

b) Variación del Triángulo de Sierpinski



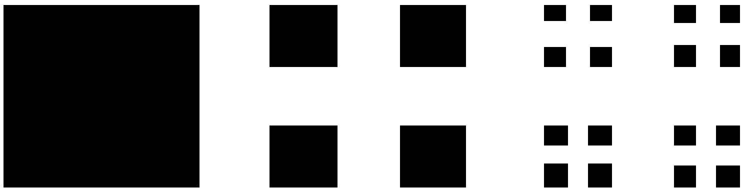
nivel	r	n	D = log (1 / n) / log r

c) El Cuadrado de Sierpinski



nivel	r	n	D = log (1 / n) / log r

d) Variación del Cuadrado de Sierpinski

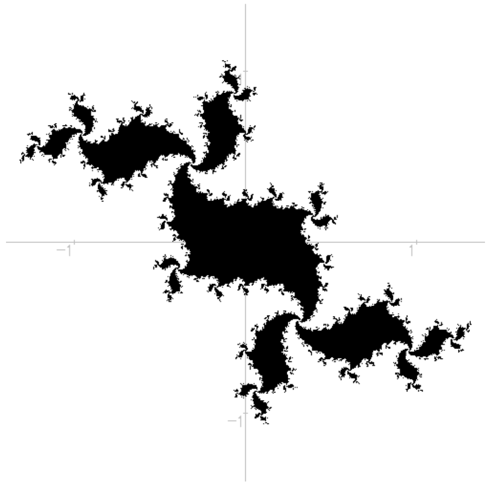


nivel	r	n	D = log (1 / n) / log r

Otros fractales

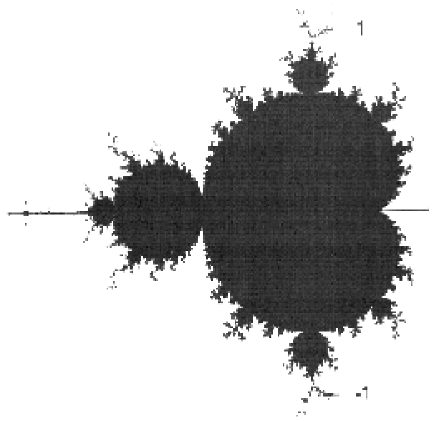
Hasta ahora nos hemos referido a un tipo de fractales caracterizado por la autosemejanza; son los llamados *fractales deterministas lineales*. Pero también existen otros *fractales deterministas no lineales*. Estos empezaron a utilizarse en 1976 por el biólogo Robert Hay en la simulación de poblaciones de insectos por iteraciones de una función: la población $p(n)$ en un año n se calcula a partir de la población en el año anterior $p(n-1)$ y una ley determinista pronto lleva a un comportamiento aparentemente caótico de la población. Los llamados **sistemas caóticos** presentan una evolución errática, pero no aleatoria, pues se rigen por unas normas de transición.

Son famosos por su belleza los fractales obtenidos en las iteraciones de funciones de variable compleja (los números complejos tienen dos componentes (x , y), llamadas parte real y parte imaginaria, y pueden ser representados como puntos en el plano).



Durante la I Guerra Mundial, Gaston Julia (1893 - 1978) trabajó con una familia de funciones de variable compleja muy sencilla: $z_n^2 + c = z_{n+1}$, siendo c una constante (número complejo). Dado un valor inicial z_0 e iterando, se obtienen z_1, z_2, z_3, etc. Aquellos valores iniciales z_0 que daban lugar a una sucesión acotada los representó en negro; y en blanco, los que producían una sucesión hacia el infinito. Así obtuvo el famoso **Conjunto de Julia**.

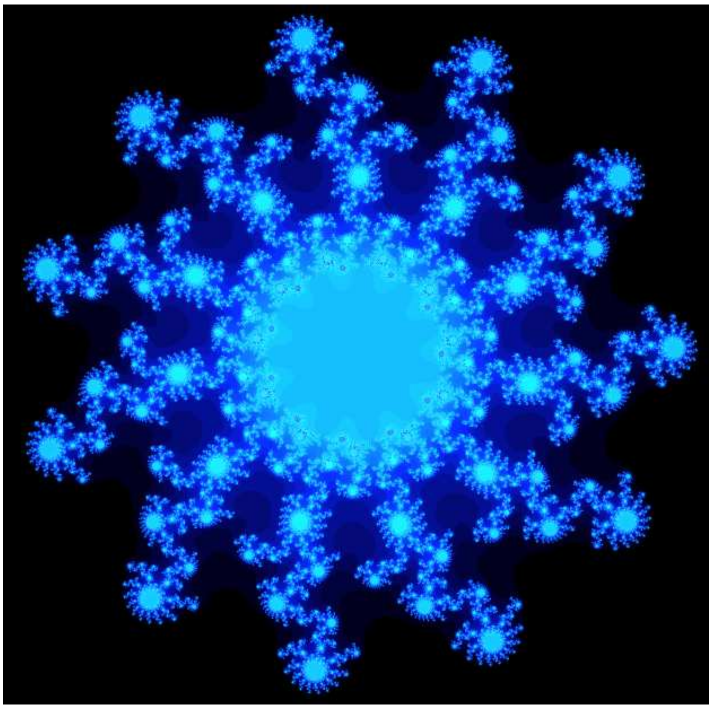
En 1979, Benoît Mandelbrot (1924) aplicó colores diferentes a los posibles valores de c , según el número de iteraciones necesarias para asegurar la convergencia de la anterior serie z_n (algoritmo de tiempo de escape). Así obtuvo el **Conjunto de Mandelbrot**:



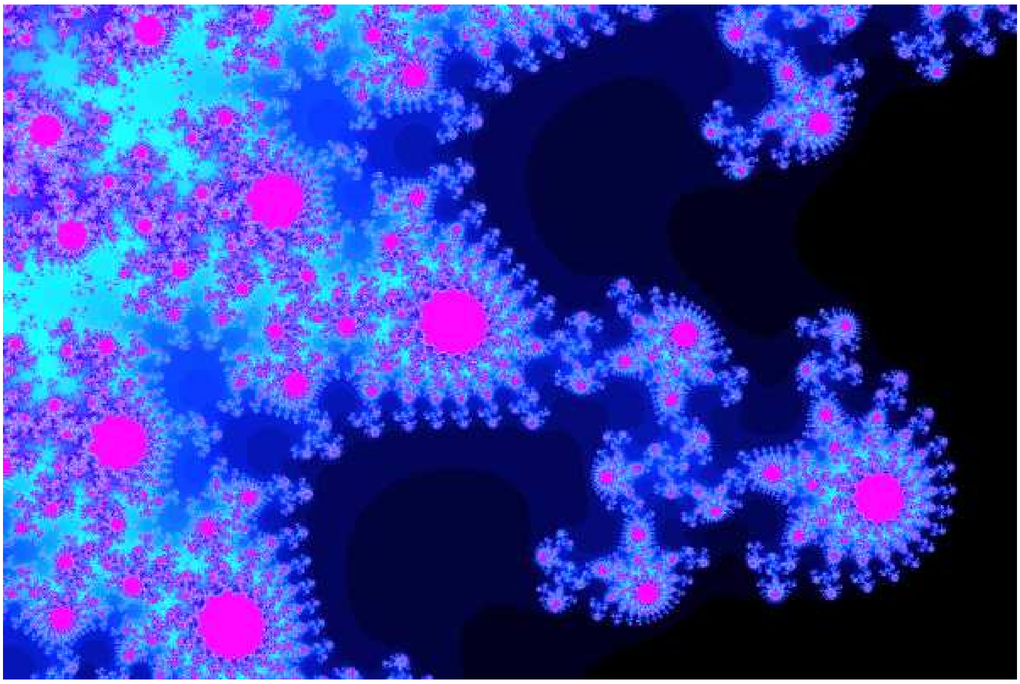
Con otras funciones de variable compleja, por métodos similares y aprovechando el avance de la informática, se han conocido multitud de nuevos fractales.

Por ejemplo:

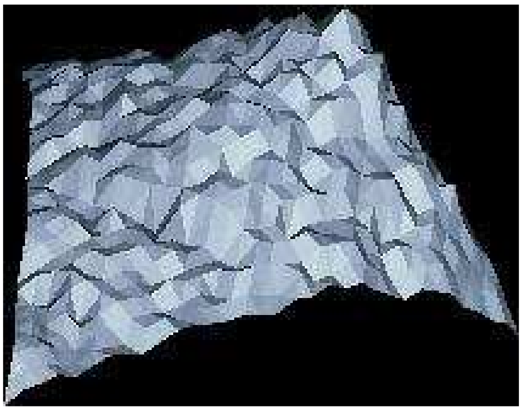
Con la función $z_n^{10} + c = z_{n+1}$ y la constante $c = -0.925 + 0{,}19\, i$ se obtiene esta imagen:



Con la función $z_n^{12} + c = z_{n+1}$ y la constante $c = -0.89511414 + 0.1i$ se obtiene esta imagen:



También se han desarrollado *fractales aleatorios*, en cuyos procesos de iteración interviene el azar. Estos se utilizan, por ejemplo, en la simulación de los efectos de la erosión en paisajes generados por ordenador, dándoles realismo, etc. Son de gran utilidad en la industria del Cine, al sustituir el diseño detallado por algoritmos que "trabajan solos". Se utilizaron por vez primera en *Star Trek: La ira de Khan*, en la representación del planeta Génesis. Luego, en *La Guerra de las Galaxias*, *El Señor de los Anillos*, etc.



Aplicaciones

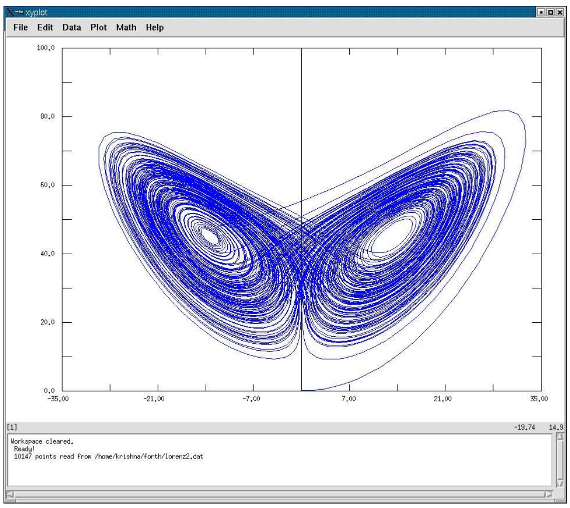
- Estudio del clima

En 1963, Edward N. Lorenz del MIT (Massachussets Institute of Technology) formuló un sistema de pocas variables que presentaba un comportamiento muy complejo. Estaba estudiando la predicción del tiempo y había observado que el clima sigue un modelo de comportamiento que es periódico; sin embargo, nunca esos comportamientos se repetían con total exactitud. Tenía un ordenador y doce ecuaciones para simular el proceso del tiempo. Un día quiso ver de nuevo una secuencia particular. Para simplificar, comenzó en medio de la secuencia y después de una hora la secuencia había evolucionado de forma diferente. Lo que ocurría es que el ordenador utilizaba seis decimales y Lorenz sólo había introducido tres.

Este fenómeno, común en la teoría del caos, es conocido como **sensibilidad a las condiciones iniciales** Un pequeño cambio en ellas puede cambiar drásticamente a largo plazo el comportamiento de un sistema. Es imposible alcanzar un nivel de precisión de millonésimas. De esta idea partió Lorenz para afirmar que es imposible predecir el tiempo atmosférico con precisión.

El fenómeno anterior también es conocido de forma popular como ***Efecto Mariposa****: el batir de las alas de una mariposa en África puede provocar una cadena de hechos que lleguen a provocar un tornado en el Caribe*.

Para Lorenz fue sorprendente el hecho de que cualquier pequeña variación en las condiciones iniciales hacía obtener unos valores totalmente diferentes y, sin embargo, tras un número suficientemente grande de iteraciones se obtenía la misma figura (una doble espiral conocida como atractor de Lorenz –en la figura-).



La Física estudia hoy los Sistemas Caóticos (turbulencias, nubes, erupciones, etc), como resultados de modelos deterministas, no del azar, con comportamiento casi periódico y gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Su espacio de fases (situaciones posibles) tiene una estructura, llamada *atractor extraño*, que es fractal. Es por ello que a la Geometría Fractal se le llama **Geometría del Caos**.

- Topografía

La formación de una costa o de la orilla de un río son procesos físicos similares y pueden ser simulados mediante modelos matemáticos que dan lugar a objetos fractales. Se establece el contacto y la interacción entre el agua y la tierra y se producen grandes modificaciones en los perfiles de las mismas. Por ejemplo, la formación de una costa se puede simular mediante la Curva de Koch (ésta tiene una dimensión fractal de 1,26129 y se ha obtenido que la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña es 1,3).

- Sistemas arteriales y venosos

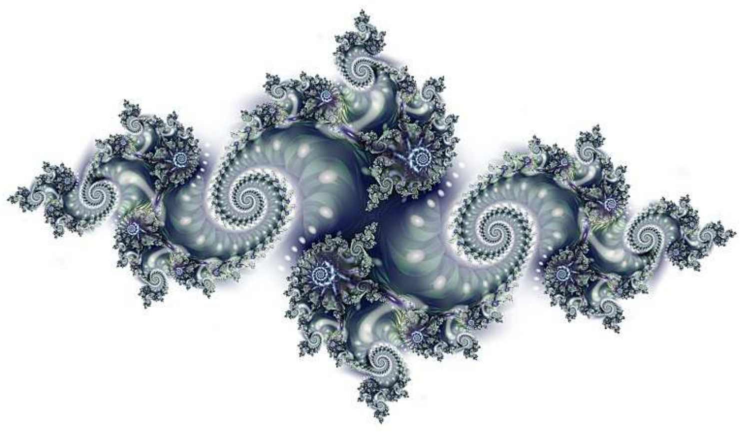
Según Goldberger (1990), en el cuerpo humano nos encontramos con muchas estructuras llamadas fractaliformes, que se pueden ver, por ejemplo, en las redes nerviosas, las redes de vasos sanguíneos y el sistema de tubos pulmonares encargados del transporte y evacuación del oxígeno y anhídrido carbónico. Estas estructuras son fundamentales en el funcionamiento del corazón. Dos investigadores de la Universidad de Washington utilizaron la geometría fractal para explicar anomalías en el flujo sanguíneo que penetra en un corazón sano. Si se interrumpe ese flujo, se produce el infarto de miocardio.

Las ramificaciones y repliegues fractales, al aumentar la dimensión, amplían mucho la superficie de las áreas de absorción, como el intestino, de distribución o recolección (vasos sanguíneos, conductos biliares o bronquios) y del proceso de información (nervios). Son el resultado del lento desarrollo y evolución del embrión humano.

- Estudio del cáncer

La dimensión fractal de la superficie celular permite caracterizar las células de diferentes tipos. Es posible distinguir células cancerosas de células sanas con ayuda de esta característica. Ya se ha aplicado para diferenciar células de pacientes con leucemia de células normales.

Y además los fractales se utilizan en: el estudio de las curvas de fluctuación de la Bolsa, el arte fractal (música, pintura, imágenes 3D), la compresión de imágenes digitales, antenas de teléfonos móviles, etc.



Fractales en Internet

Hay un gran número de webs y blogs que nos hablan de fractales y que encontraréis con ayuda de los buscadores. Se pueden ver sorprendentes paisajes fractales del Coto de Doñana en: www.armoniafractal.com. Asimismo, en Youtube, se encuentran muchos videos que en un zoom continuo exploran el interior de fractales.