Problemas Olímpicos II

Eva Elduque Laburta y Adrián Rodrigo Escudero

1. Demostrar que para todo par de números reales positivos (mayores que cero) x, y se verifica:

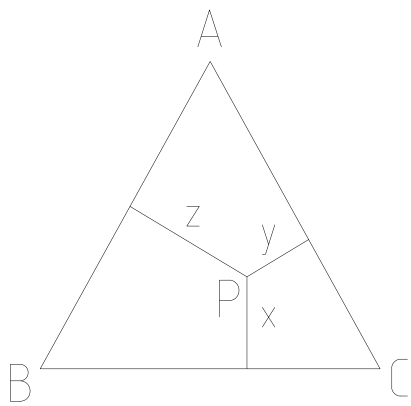
   $$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

   Aplicando el resultado anterior, probar que si a, b, c son números reales positivos, se cumple que:

   $$\frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \geq 8$$

   (Fase local, 1985)

2. Sea ABC un triángulo equilátero de lado l, y P un punto interior cualquiera. Sean x, y, z las distancias de P a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ respectivamente.

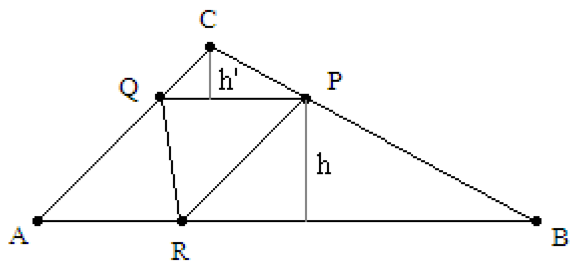
   Demostrar que la suma $x + y + z$ es constante, es decir, no depende de la posición de P. Hallar $x + y + z$.

   (Fase local, 1982)

3. Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

   (Fase Nacional, 1994)

4. Sea P un punto del lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC. La paralela por P a $\overline{AB}$ corta al lado $\overline{AC}$ en el punto Q y la paralela por P a $\overline{AC}$ corta al lado $\overline{AB}$ en el punto R. La razón entre las áreas de los triángulos RBP y QPC es k^2. Determínese la razón entre las áreas de los triángulos ARQ y ABC.



(Fase local, 2000)

5. Demostrar que si

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ &\dots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 &= 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{100} = 0$$

(Fase local, 1982)

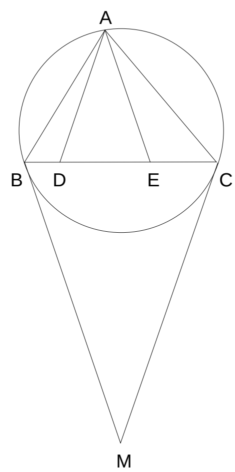
6. Encontrar todas la soluciones (x, y) reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2y + xy^2 = -2 \end{cases}$$

(Fase local, 2006)

7. Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$



(Fase Nacional, 1998)