PROBLEMAS OLÍMPICOS II

Eva Elduque Laburta
Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza

1. Sean a, b, c números reales no nulos y distintos. Probar que si las ecuaciones $x^2 + ax + bc = 0$ y $x^2 + bx + ca = 0$ tienen una raíz común, entonces las restantes raíces verifican la ecuación $x^2 + cx + ab = 0$. (Fase local 2005)

2. Se considera un triángulo ABC con $\angle BAC = 45º$ y $\angle ACB = 30º$. Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que $\angle AMB = 45º$ y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$. (Fase local 2005)

3. En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC. (Fase local 2006)

4. Halla todos los pares de números naturales x, y ($x < y$) tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1999. (Fase local 1999. Es bastante común que pongan un problema relacionado con el año.)

5. Un cuadrilátero convexo tiene la propiedad que cada una de sus dos diagonales biseca su área. Demuestra que este cuadrilátero es un paralelogramo. (Fase local 2008)

6. Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30. (Fase local 2008)