Josep Rochera Gaya (IES Pilar Lorengar)
Taller de Talentos Matemáticos
Zaragoza, 20 febrero 2009

# VARIA GEOMETRICA

## Introducción

En los dos talleres de cursos pasados dedicados a Construcciones Geométricas se dio una panorámica relativamente amplia, aunque muy superficial, sobre aspectos de la Geometría que, o bien han desaparecido de los cursos de Matemáticas, o bien no se tratan con la suficiente profundidad debido a la falta de tiempo.

Los conceptos elementales como la semejanza de figuras y el teorema de Pitágoras, junto con propiedades de la circunferencia nos permiten resolver una cantidad bastante grande de problemas del plano y, en ciertos casos, también del espacio. Pero la riqueza de la Geometría hace que haya muchos problemas que no se pueden tratar directamente con dichos métodos, sino que haya que utilizar otras herramientas con las que hacerles frente.

El poco tiempo de los programas de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria y el hecho de que el Bachillerato tenga sólo dos cursos implican que los conceptos (especialmente geométricos) que antiguamente se daban con una cierta extensión, en la actualidad hayan casi desaparecido del mapa. En este corto taller trabajaremos un poco en conceptos y herramientas ya conocidos a la vez que introduciremos otros para ampliar horizontes. Para poder entender bien todos los conceptos hace falta bastante más tiempo del que disponemos. Será el tiempo y la práctica los que permitan profundizar en estas técnicas.

Antes de pasar a la tarea, nos permitimos refrescar algunas normas o consejos de carácter muy general que se pueden aplicar en la resolución de problemas (no sólo de Geometría o de Matemáticas). En cada problema de los que veremos es conveniente utilizar uno o varios de ellos.

- En muchas ocasiones, al leer un problema geométrico no sabemos cuáles pueden ser los pasos que debemos seguir para llegar a resolverlo. Por eso siempre conviene **meditar muy bien sobre el significado del problema y saber bien qué es lo que se nos pide**, cosa que, a veces, no es tan evidente como pueda parecer.
- En ocasiones, **la simetría de una figura facilita enormemente su resolución**, se puede dividir la figura en partes iguales o utilizar puntos característicos de la misma, mirar si se cumple alguna relación. Esto nos permitirá resolver el problema centrándonos sólo en una parte pequeña del mismo.
- Algunos problemas pueden resolverse al **desmontar la figura y recomponerla de otra manera**. Una dificultad enorme puede traducirse, a veces, en una simplicidad asombrosa de forma casi “mágica”.
- **Suponer el problema demostrado y empezar desde atrás**. En ocasiones será más fácil seguir el camino inverso o, tal vez, llegar a un punto en el que sea más fácil unir las dos vías de partida (inicio y fin) de la demostración.
- Conviene siempre **volver a pensar el problema pasado un cierto tiempo**. Con las ideas frescas podemos descubrir algo que no habíamos advertido, iniciar la resolución de otra manera o, simplemente, encontrarnos con la ayuda que nos presta el subconsciente que, durante ese tiempo, ha estado dándole vueltas al problema sin que nos diéramos cuenta.

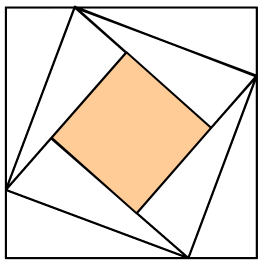
- Hay que hacerse a la idea de que el trabajo empleado en resolver un problema no garantiza necesariamente su resolución (lo que puede ser frustrante), pero, en general, la satisfacción personal que proporciona la resolución de algunos problemas compensan sobradamente el esfuerzo dedicado. Por otra parte, **los intentos "baldíos" permiten profundizar en las propiedades** de algunas figuras o en métodos de resolución que se podrán aplicar en otros problemas.

Entenderemos mejor los anteriores consejos con ejemplos concretos.

## 1. Geometría del plano

Los conceptos básicos de la Geometría, como el teorema de Pitágoras o la semejanza de triángulos, son como la llave inglesa de la mecánica, se utilizan constantemente. Los recordaremos brevemente con los siguientes problemas:

1. Dentro de una circunferencia de radio R se encuentran otras tres circunferencias de radios R/2 y r, siendo todas ellas tangentes entre sí y r el mayor valor posible. Hallar r en función de R.
2. La altura de un edificio AB es de 40 m. Hallar la altura de otro edificio CD sabiendo que las visuales BC y AD se cortan en un punto F a 24 m del suelo.
3. Dentro del cuadrado ABCD de lado 5 se construyen las circunferencias de radios 2 y 5 con centros respectivos en A y C. Sean P un punto del lado AB, y Q un punto del AD de tal manera que PQ sea tangente a las circunferencias anteriores. Hallar el perímetro del triángulo APQ.
4. Inscribir en un cuadrado dado un triángulo equilátero con un vértice común.
5. Doblar las puntas de un cuadrado en la forma que indica la figura, de modo que el área del cuadrado del centro valga 1/n de la del cuadrado grande.



## 2. Construcciones con regla y compás

Como ya sabemos, cuando se habla en Geometría de regla y compás se sobreentiende que la regla no está graduada, es decir, sólo puede servir para trazar rectas, nunca para medir distancias. Para medir tenemos el compás, además de poder trazar con él circunferencias o arcos.

Las construcciones geométricas con regla y compás han pasado a formar parte más de la práctica de Dibujo Lineal que de las Matemáticas, tal vez debido a la escasez de horas más que a su poca utilidad pedagógica. La prueba está en que las matemáticas escolares francesas dedican una gran parte de su tiempo a la Geometría, en particular al uso de la regla y del compás, por su carácter formativo.

Como ya se trató (insuficientemente) en el primer taller, nos limitaremos únicamente a dos ejercicios.

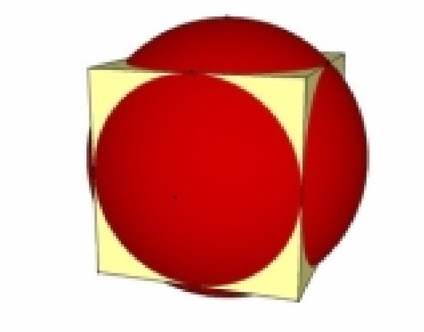
6. Construir con regla y compás el triángulo del problema nº 4.

7. Construir con regla y compás el triángulo ABC conociendo un lado $c$, el ángulo adyacente $B=\alpha$ y la suma de los otros dos lados: $a+b$.

## 3. Geometría del espacio

La Geometría del espacio suele ser bastante más complicada que la del plano, las herramientas que se pueden utilizar son también variadas, como la trigonometría esférica y los productos escalar y mixto. No obstante, en muchas ocasiones, un buen punto de vista y una reducción del problema al plano facilitan enormemente la solución. En el taller correspondiente a 4º ESO se trataron unos cuantos ejemplos, recordaremos los métodos con tres ejercicios.

8. Una esfera es tangente simultáneamente a las doce aristas de un cubo de lado 4 cm, teniendo ambas figuras el mismo centro. ¿Cuál es el radio de la esfera?



9. Calcular el ángulo diedro de un tetraedro regular.

10. Sobre una mesa se encuentra una semiesfera de radio 1 con su parte plana hacia abajo. En forma circular, rodeando la semiesfera, se colocan 6 esferas de radio r, de tal forma que cada una es tangente a la semiesfera, a la mesa y a las dos esferas adyacentes. Calcular r.

## 4. Descomposición / composición de figuras

Consiste en desmontar una figura y recomponerla de otra manera diferente que permita resolver más fácilmente el problema. Aunque parece una cosa sencilla, en ocasiones puede ser complicado llegar a saber si este método se puede aplicar o si puede funcionar.

11. Un triángulo equilátero es isoperímetro de un hexágono regular. Si la superficie del triángulo es 1994 $cm^2$, ¿cuál es la del hexágono?

12. Hallar el área de un octógono inscrito en una circunferencia y que tiene cuatro lados consecutivos de 3 cm y los restantes cuatro lados de 2 cm.

## 5. Método vectorial: independencia lineal

En la resolución de los problemas de los apartados anteriores se utilizaban básicamente los conceptos y herramientas usuales en la matemática escolar. Con este apartado entramos en un terreno poco conocido, aunque se haya visto una introducción en las lecciones de Geometría de Matemáticas I. La dificultad de estos problemas estriba normalmente en que se requiere una demostración más que un mero cálculo, con lo que el nivel de abstracción suele ser bastante más elevado.

Básicamente, se trabaja con el concepto de combinación lineal (suma de productos de números por vectores) eligiendo bien los vectores (pares de puntos) a utilizar.

En el plano euclídeo, si dos vectores no nulos **a** y **b** tienen direcciones distintas, también las tendrán sus productos por los escalares (números) $\alpha$ y $\beta$, así, no puede ser que $\alpha \cdot \mathbf{a}$ sea igual a $\beta \cdot \mathbf{b}$, salvo que $\alpha$ y $\beta$ sean, los dos, nulos. Esto se puede expresar, de manera equivalente, de la siguiente manera: si $\alpha \cdot \mathbf{a}+\beta \cdot \mathbf{b}=\mathbf{0}$ entonces $\alpha=0$ y $\beta=0$ , o sea, la única combinación lineal de los vectores **a** y **b** que es igual al vector nulo es la trivial (los coeficientes son los dos cero). Este concepto recibe el nombre de independencia lineal y, en el plano, se reduce a que los dos vectores (no nulos) tienen direcciones distintas.

Este concepto es muy importante y puede generalizarse de forma natural al espacio (tres vectores) o a un espacio de n dimensiones, dando lugar a lo que se conoce como Álgebra Lineal, con grandes aplicaciones.

El procedimiento general suele consistir en obtener una combinación lineal de dos vectores (o más si no se trabaja en el plano) linealmente independientes, direcciones distintas en el plano, así todos los coeficientes serán cero, de esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones cuya resolución nos da la solución del problema.

Para más detalles, remitimos al lector a cualquier libro de Matemáticas I de Bachillerato. De momento practicaremos con los siguientes ejemplos.

13. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.
14. (a) Demostrar que el baricentro del triángulo ABC viene determinado por el punto G tal que CG=1/3(a+b), siendo a=CA y b=CB.
    (b) Demostrar que CG=2 GM.

## 6. Producto escalar

Al igual que el método vectorial, el producto escalar es una herramienta que se debe haber visto a lo largo de 1º de Bachillerato. Se trata de un útil muy potente que nos permite trabajar de una manera muy cómoda en muchos problemas en los que hace falta averiguar distancias entre puntos o calcular ángulos entre vectores.

15. Sea ABC un triángulo cualquiera. Exteriormente a él se construyen dos cuadrados BAEP y ACRD de lados AB y AC respectivamente. Sean M y N, respectivamente, los puntos medios de BC y ED. Demostrar que AM es perpendicular a ED y que AN es perpendicular a BC.
16. En el espacio euclídeo E3, probar que si un tetraedro tiene dos pares de aristas opuestas ortogonales (perpendiculares), el tercer par también lo es.

## 7. Lugares geométricos

Tal vez sean éstos los problemas que más han sufrido con el recorte de la Geometría en los programas de Bachillerato. No es fácil resolverlos si no se ha practicado con unos cuantos previamente.

17. MN son los extremos de un listón de madera que se apoya sobre una pared (OM perpendicular a ON). Hallar el lugar geométrico (l.g.) que describe P, punto medio de MN, cuando el listón se desliza sobre el suelo.

18. Sobre el segmento [AB] se considera el punto M variable. Se construyen los triángulos equiláteros AMC, MBD con bases AM y MB, y se considera M’ punto medio de CD.

(a) Determinar el lugar geométrico de M’ al variar M de A a B.

(b) Demostrar la afirmación anterior.

(Nota: En estos problemas conviene tomar unos puntos característicos de M para ver qué ocurre, por ejemplo, se puede dividir AB en 4 u 8 partes iguales).

## 8. Coordenadas cartesianas. Ecuaciones

Fue Descartes el primero en resolver problemas geométricos con métodos algebraicos. Estableció un sistema de referencia para asignar coordenadas a los puntos y obtener ecuaciones para las diferentes figuras geométricas, con lo que las rectas se podían considerar como el conjunto de puntos que verificaban una determinada ecuación (lineal), las circunferencias una ecuación de segundo grado, etc.

Esta técnica permitió dar un gran avance a la matemática siendo, en líneas generales, bastante sencilla de aplicar en su concepción aunque, en bastantes ocasiones, resulte incómoda de desarrollar y difícil de interpretar sus resultados.

Posiblemente sea el método más utilizado en el Bachillerato. Por ello, remitimos al lector a cualquier texto de Matemáticas para encontrar abundantes ejemplos.

## 9. Problemas de mínimos

Los problemas de máximos o mínimos no suelen ser nunca fáciles. Debido a que la formación recibida de cálculo es más amplia que la de Geometría, suelen resolverse definiendo una función de la que se estudia, por derivación, su comportamiento para obtener sus máximos y sus mínimos. En algunas ocasiones el razonamiento geométrico se puede aplicar con éxito simplificando enormemente su solución.

19. El triángulo ABC es rectángulo en A, y P es un punto variable de la hipotenusa que se proyecta ortogonalmente en I, J sobre los dos lados del ángulo recto. Obtener la posición de P que hace mínima la distancia de IJ.

## 10. Papiroflexia

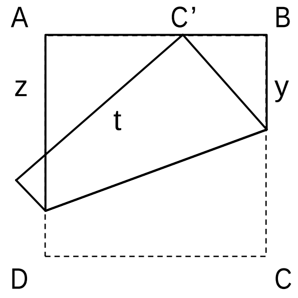
La papiroflexia no es un método de resolución de problemas, sino una actividad, en principio lúdica, que permite profundizar en las propiedades de algunas figuras y visualizar otras de una manera “física” o “real”. Se puede sistematizar matemáticamente los plegados del papel y desarrollar toda una teoría sobre ellos, actualmente es un campo en estudio.

Veamos un ejemplo que muestra cómo obtener problemas matemáticos estimulantes a partir de dicha actividad.

20. Se tiene una hoja de papel cuadrada ABCD de lado 1. Se pliega de tal forma que el vértice C queda sobre C’ en el lado AB dividiéndolo en su n-ésima parte (C’B=1/n).

(a) Hallar los segmentos y, z, t.

(b) Deducir que si C' es el punto medio de AB, los lados de los triángulos obtenidos están en la proporción 3 : 4 : 5.




## Consideraciones finales

La mejor manera de aprender Matemáticas es hacerlas, más que leerlas. Por ello, tras mucho dudar, se ha decidido presentar solamente los enunciados de los problemas, y desarrollar la solución en la pizarra o con una presentación con el proyector multimedia.

Los apuntes tomados en el aula tienen que servir como punto de partida y nunca de llegada. Tan importante como una clase, charla o conferencia es la reflexión posterior que le sigue. Un ejercicio siempre interesante consiste en revisar y completar en casa los apuntes para asimilar mejor lo que se ha escuchado o entendido, de esta forma se afianzan los conceptos cuando todavía se tiene la memoria caliente. Con este fin, sugerimos desarrollar y completar los problemas en casa e intentar encontrar soluciones más sencillas y elegantes.

Con los problemas anteriores no hemos hecho sino abrirnos a un campo tremendamente amplio en el que se puede profundizar sin fin. Si el lector quiere dedicar su atención a buenos problemas, hay muchas páginas web que son interesantes (se encuentran sorpresas en las obtenidas en los buscadores con palabras clave adecuadas). En particular, recomendamos las siguientes direcciones de Internet, que se adaptan bastante bien al nivel general de los asistentes a este taller:

- Especialmente recomendable la página web de la Olimpiada Matemática Española:

  http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimpmain.htm

- De ésta, resaltar las colecciones de problemas (variados) y clasificados en dos niveles que se encuentran en:

  http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimpmat.htm

- Problemas Geométricos de la Olimpiada Matemática Española: Fase local (Aragón) y Fase Nacional. Material recopilado por José Luis Rodrigo para la sesión del Taller de Talentos Matemáticos de 15.12.06:

  http://www.unizar.es/ttm/2006-07/enunciadosgeometricos.pdf

- Asimismo, la página personal de José Luis Rodrigo con problemas (y sus soluciones):

  http://www.terra.es/personal/iesblecu/

Por último, señalar nuevamente la importancia que tiene la lengua inglesa, especialmente en matemáticas. Indicamos sólo dos webs absolutamente imprescindibles en Geometría, con contenidos muy variados y amplios, si bien es cierto que la mayoría son de un nivel elevado:

http://www.cut-the-knot.org

http://mathworld.wolfram.com