SOLUCCIONES

Problema 1. ¿Se puede expresar el área de un triángulo ABC mediante la fórmula $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$? R = radio del círculo circunscrito, r = " " " inscrito.

Solución.- Si recordamos el teorema de los senos y su interpretación geométrica, tenemos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R} \quad \sin B = \frac{b}{2R} \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

Si sustituimos en la expresión que nos dan, queda

$$S = Rr\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right) = \frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{r}{2}\cdot 2p = rp =$$

$$= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\cdot p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ = fórmula de Herón para el cálculo del área de un triang. en función de los lados.

Es pues el área la fórmula dada.

Problema 2. El nº A3640548982706 44B es divisible por 99, calcular el par ordenado (A, B)

Solución.- Si es divisible por 99, lo será por 9 y 11 a la vez, así se obtiene:

$$\begin{cases} 71 + A + B = \dot{9} \\ 37 + A - 34 - B = \dot{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \dot{9} - 71 \\ A - B = \dot{11} - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \dot{9} + 1 \\ A - B = \dot{11} - 3 \end{cases}$$ ⇒ sumando y restando

$$\begin{aligned} 2A &= \dot{9} + \dot{11} - 2 \\ 2B &= \dot{9} - \dot{11} + 4 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A &= \frac{\dot{9} + \dot{11}}{2} - 1 \\ B &= \frac{\dot{9} - \dot{11}}{2} + 2 \end{aligned}}$$

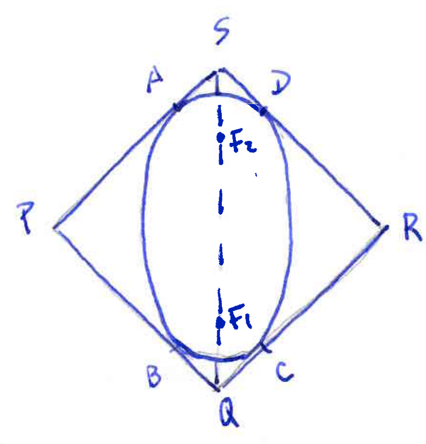
Combinando los posibles valores de $\dot{9}$ y $\dot{11}$ obtenemos $A = 9 \quad B = 1$

Así $(A, B) = (9, 1)$

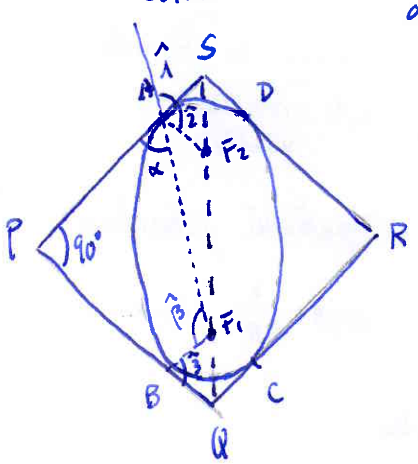
Problema 3- Dada la elipse de la figura, inscrita en un cuadrado PQRS, siendo F_1 y F_2 los focos, justificar:

a) $\widehat{PAF_1} = \widehat{QBF_1}$

b) PAF_1B es un cuadrilátero inscriptible en un círculo.



Solución.



a) El ángulo $\hat{P} = 90°$, por ser PSRQ un cuadrado

1) $\overline{AF_1}$ es un radio vector de la elipse

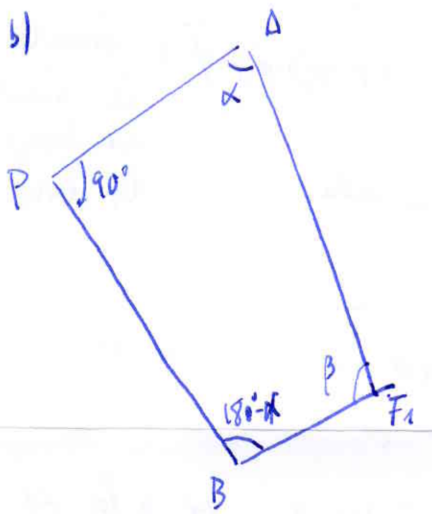
2) Propiedad de la tangente a la elipse en un punto: "es la bisectriz del ángulo que forman un radio vector y la prolongación del otro"

3) así $\hat{1} = \widehat{PAF_1}$ por opuestos por el vértice

$\hat{1} = \hat{2}$ por ser AS bisectriz

4) $\hat{2} = \hat{3}$ por simetría de la figura $\Rightarrow \widehat{PAF_1} = \widehat{QBF_1}$ c.q.d.

b)



así $90° + \alpha + 180° - \alpha + \beta = 360° \Rightarrow \beta = 90°$

por lo tanto se trata de un cuadrilátero con dos ángulos opuestos de 90°, luego es inscriptible en una circunferencia.

<u>Problema 4</u>: Resolver la ecuación $f(x) = x^{(8)} + \binom{8}{1} x^{(7)} x^{(1)} + \binom{8}{2} x^{(6)} \cdot x^{(2)} + \dots + \binom{8}{8} x^{(8)} = 0$

siendo $x^{(h)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-h+1)$.

Solución. Observamos que: $(a+b)^{(1)} = a^{(1)} + b^{(1)}$

$$(a+b)^{(2)} = (a+b)\cdot(a+b-1) = a(a-1) + ab + ba + b(b-1) =$$
$$= a^{(2)} + \binom{2}{1} ab + b^{(2)}$$

$$(a+b)^{(3)} = (a+b)^{(2)} (a+b-2) = \left[a^{(2)} + \binom{2}{1} ab + b^{(2)}\right]\cdot(a+b-2) =$$
$$= a^{(2)} (a-2+b) + \binom{2}{1} ab\,(a-1+b-1) + b^{(2)}(a+b-2) =$$
$$= a^{(3)} + a^{(2)}\cdot b + \binom{2}{1} a^{(2)} b + \binom{2}{1} a\, b^{(2)} + a\cdot b^{(2)} + b^{(3)} =$$
$$= a^{(3)} + \binom{3}{1} a^{(2)} b^{(1)} + \binom{3}{2} a^{(1)}\cdot b^{(2)} + b^{(3)}$$

Para demostrar la fórmula general tendremos que proceder por inducción:

Es decir, supongamos que $(a+b)^{(n)} = a^{(n)} + \binom{n}{1} a^{(n-1)} \cdot b + \cdots + \binom{n}{n} b^{(n)}$

Tendremos que probar que la fórmula es cierta para $n+1$

$$(a+b)^{(n+1)} = (a+b)^{(n)} \cdot (a+b-n) = \left[a^{(n)} + \binom{n}{1} a^{(n-1)} \cdot b + \cdots + \binom{n}{n} b^{(n)} \right] \cdot (a+b-n) =$$

$$= a^{(n)} \cdot (a-n+b) + \binom{n}{1} a^{(n-1)} b \left(a-(n-1)+b-1\right) + \cdots + \binom{n}{n} b^{(n)} (a+b-n) =$$

$$= a^{(n+1)} + \binom{n}{0} a^{(n)} b + \binom{n}{1} a^{(n)} b + \binom{n}{1} a^{(n-1)} b^{(2)} + \binom{n}{2} a^{(n-1)} \cdot b^{(2)} + \cdots + b^{(n+1)} =$$

$$= a^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} a^{(n)} b + \binom{n+1}{2} a^{(n-1)} b^{(2)} + \cdots + b^{(n+1)} \quad \text{c.q.p.}$$

así pues $f(x) = (x+x)^{(8)} = (2x)^{(8)} = 2x(2x-1)(2x-2) \cdots (2x-7) = 0$

soluciones : $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $\ldots$, $x=7/2$.

<u>Problema 5.</u>- Demostrar que los números de la sucesión 16, 1156, 111556, 11115556, ... que se obtienen intercalando 15 entre las cifras centrales de cada uno, para obtener el siguiente, son siempre cuadrados perfectos.

Solución.- Vemos que

$16 = 4^2$

$1156 = 34^2$

$111556 = 334^2$

$\cdots$

Demostraremos por inducción que esto es cierto para cualquier número de ese tipo.

Supongamos que $1 1 \overset{(n+1}{\cdots} 1 5 5 \overset{(n}{\cdots} 5 6 = [3 3 \overset{(n}{\cdots} 3 4]^2$

Tendremos que probar que se cumple para $n+1$, es decir que el cuadrado de $3 3 \overset{(n+1}{\cdots} 3 4$ es de la forma de los nº indicados,

es decir :

$$[3 3 \overset{(n+1}{\cdots} 3 4]^2 = [3 \cdot 10^{n+1} + 3 \overset{(n}{\cdots} 3 4]^2 =$$

$$= \underbrace{9 \cdot 10^{2n+2}}_{(1)} + \underbrace{1 1 \overset{(n+1}{\cdots} 1 5 5 \overset{(n}{\cdots} 5 6}_{(2)} + \underbrace{\overset{6}{\overbrace{2 \cdot 3}} \cdot 10^{n+1} \cdot 3 \overset{(n}{\cdots} 3 4}$$

lo transformo en

$$\underbrace{2 0 0 \overset{(n}{\cdots} 0 4 \cdot 10^{n+1}}_{(3)}$$

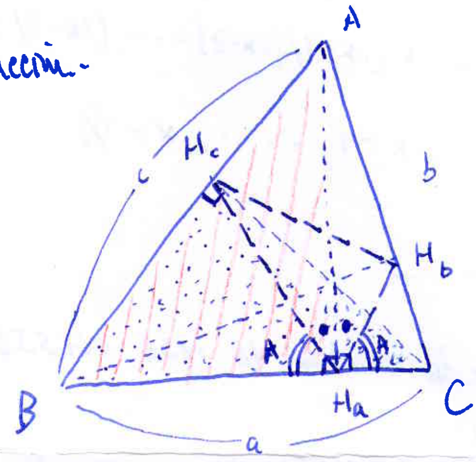
sumamos las expresiones (1) (2) y (3) :

$$
\begin{array}{rl}
 & 90\ldots\overset{(2n+2}{\ldots}\ldots0\\
+ & 1\ldots\overset{(n+1}{\ldots}115\ldots\overset{(n}{\ldots}56\\
 & 20\ldots\overset{(n}{\ldots}040\ldots\overset{(n+1}{\ldots}0\\
\hline
 & 11\ldots\overset{(n+2}{\ldots}155\ldots\overset{(n+1}{\ldots}56
\end{array}
$$

c.q.d.

Problema 6.- Demostrar que las alturas de un triángulo acutángulo son las bisectrices de los ángulos de un triángulo cuyos vértices son los pies de estas alturas.-

Solución.-



Los triángulos $\overset{\triangle}{ABH_a}$ (rayado en rojo) y $\overset{\triangle}{BCH_c}$ (punteado) son semejantes, pues tienen los tres ángulos iguales (un áng. recto, uno común ($\hat{B}$), y el tercero por suplementario).

Así se cumple $\dfrac{c}{\overline{BH_a}} = \dfrac{a}{\overline{BH_c}} \longrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{\overline{BH_a}}{\overline{BH_c}}$

lo cual implica que $\overset{\triangle}{ABC}$ es semejante a $\overset{\triangle}{BH_aH_c}$ (un ángulo común y los lados proporcionales).

$$\frac{a}{BH_c} = \frac{b}{H_aH_c} = \frac{c}{BH_a}$$

siendo $B\hat{H}_aH_c = \hat{A}$

De forma análoga se justificaría que $\overset{\triangle}{ABC} \approx \overset{\triangle}{CH_aH_b}$ siendo $C\hat{H}_aH_b = \hat{A}$ (ver figura).

Finalmente si a dos ángulos rectos con vértice en el punto H_a (altura AH_a) les restamos a cada uno un ángulo $\hat{A}$, los ángulos que nos quedan (figura señalados con •) serán iguales, es decir

$A\hat{H}_aH_c = A\hat{H}_aH_b$, luego la altura $\overline{AH_a}$ es bisectriz (una de ellas) del triángulo $\overset{\triangle}{H_aH_bH_c}$. c.q.d.