Adrián Rodrigo Escudero 27 de octubre de 2007

Según los libros de olimpiadas matemáticas internacionales. Los problemas de olimpiadas se clasifican en cuatro grupos: álgebra, geometría, aritmética y combinatoria. Los más usuales en la fase local son los de álgebra y geometría.

1. Álgebra. Sean a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de diferencia d. Probar que:

$$a_2^3 \le \frac{1}{10}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right)$$

OME (olimpiada matemática española) 2007

Nota: una buena dirección para el que quiera hacer problemas de desigualdades es http://www-ma3.upc.es/users/diaz/tm-imo-jld.pdf . José Luis Díaz Barrero propone desigualdades desde las más sencillas, hasta niveles muy avanzados explicando técnicas y teoremas útiles. Está en inglés pero se entiende bien.

Solución: como los cinco números están en progresión aritmética, podemos poner la desigualdad en función de a_2 y d, y luego simplificarla todo lo que podamos:

$$a_0^3 = (a_2 - 2d)^3 = a_2^3 - 3a_2^2 2d + 3a_2 4d^2 - 8d^3 \qquad a_1^3 = (a_2 - d)^3 = a_2^3 - 3a_2^2 d + 3a_2 d^2 - d^3$$

$$a_4^3 = (a_2 + 2d)^3 = a_2^3 + 3a_2^2 2d + 3a_2 4d^2 + 8d^3 \qquad a_3^3 = (a_2 + d)^3 = a_2^3 + 3a_2^2 d + 3a_2 d^2 + d^3$$

$$a_0^3 + a_4^3 = 2a_2^3 + 24a_2 d^2 \qquad a_1^3 + a_3^3 = 2a_2^3 + 6a_2 d^2$$

$$a_2^3 \le \frac{1}{10}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right) \Leftrightarrow$$

$$10a_2^3 \le 2a_2^3 + 24a_2 d^2 + 8a_2^3 + 24a_2 d^2 = 10a_2^3 + 48a_2 d^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \le 48a_2 d^2$$

Por lo tanto la desigualdad a probar es equivalente a esta última, que es cierta ya que $16, a_2, d^2$ son positivos.

2. Álgebra. Hallar todas las funciones $f : R \to R$ tales que:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

$$f(xy) = f(x) f(y) \qquad (2)$$

Para todo x, y pertenecientes a R.

Nota: el problema es muy largo para una sesión de hora y media, así que lo haremos para las funciones $f : Z \to R$, y luego el que quiera se mira la solución entera.

Preparación olimpiada internacional, Barcelona 2007

Solución: en este tipo de problemas muchas veces lo difícil no es hallar las funciones sino demostrar que son las únicas que existen. Son problemas bastante técnicos (por eso últimamente no suelen caer en competiciones internacionales), normalmente la forma de resolverlos es dar valores a x, y e ir sacando conclusiones:

Si $x, y = 0$ en (1), $\quad f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

Si $x = 1, y = 1$ en (2), $\quad f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 0 \quad$ ó $\quad f(1) = 1$

Aquí vemos que hay dos posibilidades, que se corresponden con las dos funciones posibles $f(x) = 0$ ó $f(x) = x$. Vamos a demostrar que si $f(1) = 1$ la única solución es $f(x) = x$; de forma un poco más sencilla se puede demostrar que si $f(1) = 0$ la única solución es $f(x) = 0$.

Primero probamos que para todo n perteneciente N se cumple $f(n) = n$, por inducción:

$f(1)=1$, y si $f(n)=n$, haciendo $x=n, y=1$ en (1), $f(n+1)=f(n)+f(1)=n+1$
Para hacer el paso a los enteros sustituimos $x=x, y=-x$ en (1), lo que nos sirve en general para todos los negativos: $f(0)=f(x)+f(-x) \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$

Racionales (m,n van a ser números enteros distintos de cero): $x=\dfrac{1}{n}, y=n$ en (2):

$$f(1)=f\left(\frac{1}{n}\right)f(n) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f(1)}{f(n)}=\frac{1}{n}$$

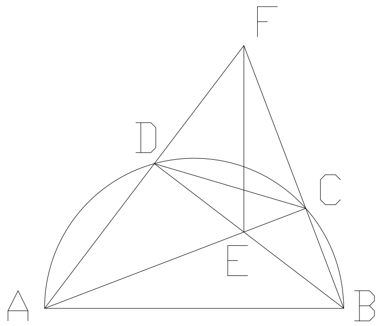
Y en general $x=m, y=\dfrac{1}{n}$ en (2): $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f(m)f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{m}{n}$

Reales: si $f(x)=x$ para los racionales, y $f(x)$ es estrictamente creciente entonces $f(x)=x$ para los reales. Así que solo nos queda probar que es creciente, pero ojo, x, y ahora son reales y no nos sirven las fórmulas halladas.
Hacemos $x=\sqrt{x}, y=\sqrt{x}$ en (2): $f(x)=f^2(\sqrt{x})\geq 0$

además si $x\neq 0$ hacemos $x=x, y=\dfrac{1}{x}$ $0\neq 1=f(1)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Rightarrow f(x)\neq 0$

Así que si $x>0 \Rightarrow f(x)>0$ y ahora suponemos que $x>y \Rightarrow x=y+k$, $k>0$ por (1): $f(x)=f(y+k)=f(y)+f(k)>f(y)$

3. Geometría. Dada una semicircunferencia de diámetro $AB=2R$, se considera una cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC.
Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la semicircunferencia.

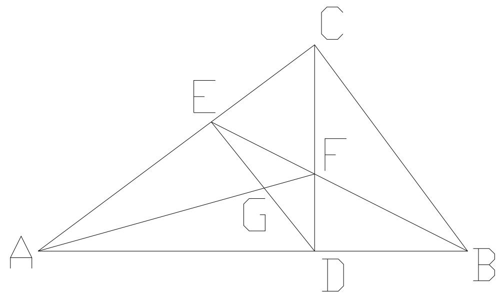


OME (olimpiada matemática española) 2007

Solución: $\angle ADB=90^o$ y $\angle ACB=90^o$ por ser ambos ángulos inscritos en una circunferencia. Por lo tanto AC y BD son alturas del triángulo ABF. La altura de ABF relativa al vértice F cortará a las otras dos alturas en el mismo punto, el punto E. Así EF es perpendicular a AB.
Los triángulos DEF y ABD son semejantes, ya que ambos tienen un ángulo recto y otro igual ($\angle ABD=90^o-\hat{A}=\angle DFE$). De esta semejanza deducimos que: $EF=AB\dfrac{DE}{AD}=ABtg\angle DAC$. Y como AB es constante y $\angle DAC$ también (por ser CD de longitud fija) EF también tiene longitud constante.

4. Geometría. En el triangulo rectángulo ABC, $\hat{C}$ es el ángulo recto, la bisectriz de $\hat{B}$ corta al lado AC en el punto E, la altura CD corta a esta bisectriz en el punto F y G es la

intersección de los segmentos AF y DE. Demostrar que $\left[ADG\right]=\left[CEGF\right]$, es decir, que las áreas del triángulo ADG y del cuadrilátero CEGF son iguales.



Preparación olimpiada internacional, Barcelona 2007

Solución: $\left[ADG\right]=\left[CEGF\right]\Leftrightarrow\left[ADF\right]=\left[CED\right]\Leftrightarrow\frac{1}{2}DFAD=\frac{1}{2}CDh_1$ (1) donde h_1 es la altura EH_1 en el triángulo CDE (H_1 no lo he dibujado).

Como los triángulos CEH_1 y CAD son semejantes, $\frac{h_1}{AD}=\frac{CE}{AC}$ (2)

Como los triángulos BCE y BDF son semejantes, $\frac{CE}{BC}=\frac{DF}{BD}$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$DFAD=CDh_1\Leftrightarrow\frac{DF}{CD}=\frac{h_1}{AD}\Leftrightarrow\frac{\frac{CEBD}{BC}}{CD}=\frac{CE}{AC}\Leftrightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{CD}{AC}$$

Y esta última expresión es cierta ya que ACD y BCD son semejantes por ser ABC rectángulo.

5. Aritmética. Encontrar todas las soluciones enteras de $x+y=xy$

Encontrar todas las soluciones enteras de $x^2-3y^2=17$

Problem-Solving Strategies, Arthur Engel

Solución: la ecuación $x+y=xy$ nos resulta un poco extraña ya que el grado de $x+y$ es 1, mientras que el de xy es 2. Así que seguramente la ecuación no tendrá soluciones para x, y muy grandes. En efecto: $x+y=xy\Leftrightarrow xy-x-y+1=1\Leftrightarrow(x-1)(y-1)=1$

Así tenemos dos posibilidades: $\begin{cases}(x-1)=(y-1)=1\Leftrightarrow x=y=2\\(x-1)=(y-1)=-1\Leftrightarrow x=y=0\end{cases}$

La ecuación $x^2-3y^2=17$ no tiene soluciones enteras, la forma de demostrarlo es típica en estos ejercicios: hacer congruencias. En este caso congruencias módulo 3:

Para todo cuadrado perfecto se cumple que: $x^2\equiv 0$ ó $x^2\equiv 1$; entonces $x^2-3y^2\equiv 0$ ó $x^2-3y^2\equiv 1$, pero $17\equiv 2$.

Para el que no conozca las congruencias, lo que hemos hecho ha sido comprobar que x^2-3y^2 y 17 no dan el mismo resto al dividirlos entre 3, y por lo tanto no pueden ser el mismo número.

6. Aritmética. Demostrar que existen infinitos números naturales N tales que N, N+1, N+2 son o bien cuadrados o bien suma de dos cuadrados.

Preparación olimpiada internacional, Barcelona 2007

Solución: si hacemos $N+1=a^2$, a natural. Entonces $N+2=a^2+1^2$ con lo que ya solo nos quedaría N:

$N=a^2-1=(a+1)(a-1)=(a-1+2)(a-1)=(a-1)^2 2(a-1)$

Es obvio que existen infinitos a que cumplen: $2(a-1)=b^2$. Por lo tanto $N=(a-1)^2 b^2$

7. Combinatoria. En una conferencia hay 201 delegados de 5 países distintos. Las edades de los delegados son mayores que 30 y menores que 35. Probar que podemos encontrar 6 delegados con la misma edad, sexo y nacionalidad.

Solución: este es el típico problema de principio del palomar, es muy probable que alguno ya lo conozca, por eso mismo es fundamental conocerlo para hacer otros ejercicios.

Por el principio del palomar, hay al menos 41 delegados del mismo país; de entre ellos, hay al menos 11 que tienen la misma edad; y finalmente, de entre ellos, hay al menos 6 que tienen el mismo sexo. Por lo tanto hay 6 delegados con la misma edad, sexo y nacionalidad.

8. Combinatoria. En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

OME (olimpiada matemática española), fase local 2007

Solución 1: llamaremos $g_1, g_2, ..., g_7$ al número de llaves que tiene el gnomo 1,2,...,7. Se tiene que:

$$\begin{cases} g_1+g_2+g_3 \geq 12\cdot 12 \\ g_1+g_2+g_4 \geq 12\cdot 12 \\ ... \\ g_5+g_6+g_7 \geq 12\cdot 12 \end{cases} \Rightarrow A(g_1+g_2+...+g_7) \geq B\cdot 12\cdot 12$$

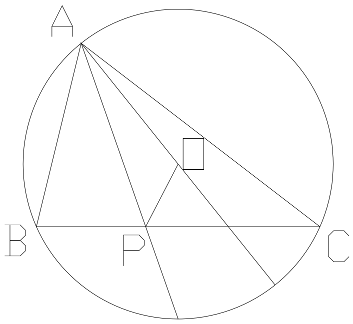
Donde B es el número de inecuaciones que se pueden formar, y A el número de veces que aparece cada g_i en el sistema. (Concretamente podríamos decir que $B=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$ es decir, combinaciones de 7 elementos tomados de tres en tres; pero no es necesario para el problema). Solamente hay que observar que cada g_i aparece tantas veces como las demás y que podemos expresar el número de "$g's$" igualmente como 7A ó 3B, luego $B=\frac{7}{3}A \Rightarrow g_1+g_2+...+g_7 \geq \frac{7}{3}12\cdot 12=336$

Solución 2: vamos a fijar una llave cualquiera ll_i, al menos 5 gnomos deben tener esa llave, ya que si no habría al menos 3 gnomos que no la tendrían, y esos 3 gnomos no podrían abrir todas las cerraduras. Luego si hay 144 llaves, y cada una la tienen al menos 5 gnomos, hay al menos $144\cdot 5=720>336$ llaves

*. Geometría. Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P.

Probar que se cumple:

$$AP^2+OA^2-OP^2=bc$$



OME (olimpiada matemática española) 2007

Solución: parece muy tentador aplicar el teorema del coseno al triángulo AOP: $AP^2 + OA^2 - OP^2 = 2AP \cdot OA \cos\angle OAP = bc$

A su vez tenemos $2OA$, que por el teorema del seno en ABC: $2OA = \dfrac{c}{sen\hat{C}}$

Así lo que tenemos que probar es que: $AP\cos\angle OAP = bsen\hat{C}$

Que se asemeja mucho al teorema del seno en APC: $\dfrac{AP}{sen\hat{C}} = \dfrac{b}{sen\angle APC}$

Si demostramos que $\cos\angle OAP = sen\angle APC$ habremos terminado:

$\angle APC = \hat{B} + \dfrac{\hat{A}}{2} = \left(180º - \hat{A} - \hat{C}\right) + \dfrac{\hat{A}}{2} = 180º - \dfrac{\hat{A}}{2} - \hat{C}$

$\angle OAP = \dfrac{180º}{2} - \dfrac{\hat{A}}{2} - \hat{C}$ (por inscrito)

Luego, $\angle APC - \angle OAP = 90º \Rightarrow \cos\angle OAP = sen\angle APC$

**. Álgebra. Sea $a \neq 1$ un número real positivo y n un entero mayor que 1. Demostrar que:

$$n^2 < \frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}$$

OME (olimpiada matemática española) 2007

Solución: podemos suponer sin perdida de generalidad que $a > 1$, sea $b = \sqrt{a} > 1$:

$$n^2 < \frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2} = \frac{\left(b^n - b^{-n}\right)^2}{\left(b - b^{-1}\right)^2} \Leftrightarrow n < \frac{b^n - b^{-n}}{b - b^{-1}}$$

Ahora podemos aplicar la ecuación ciclotómica a $b^n - b^{-n}$:

$$n < \frac{b^n - b^{-n}}{b - b^{-1}} = \frac{\left(b - b^{-1}\right)\left(b^{n-1} + b^{n-3} + ... + b^{-n+1}\right)}{b - b^{-1}} = \left(b^{n-1} + b^{n-3} + ... + b^{-n+1}\right)$$

Pero esto es equivalente a la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica:

$$\frac{\left(b^{n-1} + b^{n-3} + ... + b^{-n+1}\right)}{n} \geq \sqrt[n]{b^{n-1}b^{n-3}...b^{-n+1}} = \sqrt[n]{1} = 1$$

Teniendo siempre en cuenta que la igualdad se cumple si y solo si $b^{n-1} = b^{n-3} = ... = b^{-n+1}$, y como $b > 1$, no se cumple nunca la igualdad.