



Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

# Diferencias de cuadrados

## Taller de Talento Matemático, Bachillerato

Antonio M. Oller

7 de marzo de 2008



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

$$\frac{x}{6}$$



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; **después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo.** Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12}$$



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. **Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa** y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}$$



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, **cinco años después, tuvo un precioso niño** que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5$$



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, **una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada**. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2}$$



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. **Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años.** De todo esto se deduce su edad.”

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. **De todo esto se deduce su edad.**”

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$



# El epitafio de Diofanto

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

Diofanto vivió 84 años



# Diofanto de Alejandría

Diferencias de cuadrados

Antonio M. Oller





# Diofanto de Alejandría

Diferencias de cuadrados

Antonio M. Oller



- Vivió en Alejandría durante el siglo III.



# Diofanto de Alejandría

Diferencias de cuadrados

Antonio M. Oller



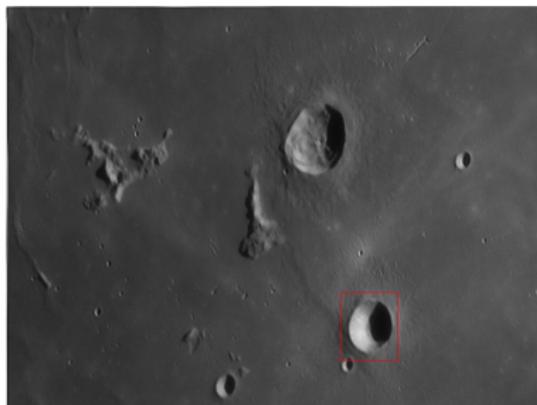
- Vivió en Alejandría durante el siglo III.
- Sólo se ha conservado parte de una de sus obras titulada *Aritmética*.



# Diofanto de Alejandría

Diferencias de cuadrados

Antonio M. Oller



- Vivió en Alejandría durante el siglo III.
- Sólo se ha conservado parte de una de sus obras titulada *Aritmética*.
- Llamamos ecuaciones diofánticas a aquellas de las que sólo nos interesan las soluciones enteras.



# ¿Tienen solución estas ecuaciones?

Diferencias de cuadrados

Antonio M. Oller

$$2x + 4y = 3$$

$$x^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = -1$$



# ¿Tienen solución estas ecuaciones?

Diferencias de cuadrados

Antonio M. Oller

$$2x + 4y = 3$$

En los enteros no, pero sí en los racionales.

$$x^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = -1$$



# ¿Tienen solución estas ecuaciones?

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$$2x + 4y = 3$$

En los enteros no, pero sí en los racionales.

$$x^2 = 2$$

En los racionales no, pero sí en los reales.

$$x^2 + y^2 = -1$$



# ¿Tienen solución estas ecuaciones?

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$$2x + 4y = 3$$

En los enteros no, pero sí en los racionales.

$$x^2 = 2$$

En los racionales no, pero sí en los reales.

$$x^2 + y^2 = -1$$

En los reales no, pero sí en los complejos.



# Problema I

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$$x^2 - y^2 = n$$



# Problema I

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$$x^2 - y^2 = n$$

¿Que debe cumplir  $n$  para que esta ecuación tenga solución?



# Problema I: casos particulares

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

¿Tienen solución?

$$x^2 - y^2 = 16$$

$$x^2 - y^2 = 21$$

$$x^2 - y^2 = 18$$



# Problema I: casos particulares

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

¿Tienen solución?

$$x^2 - y^2 = 16 \quad \text{SÍ}$$

$$x^2 - y^2 = 21 \quad \text{SÍ}$$

$$x^2 - y^2 = 18 \quad \text{NO}$$



# Problema I: solución

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$$x^2 - y^2 = n$$



# Problema I: solución

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$$x^2 - y^2 = n$$

Tiene solución si y sólo si  $n$  es impar o múltiplo de 4.



# Problema I: interpretación geométrica

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$x^2 - y^2 = n^2$  siempre tiene solución (si  $n > 2$ ).





# Problema I: interpretación geométrica

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$x^2 - y^2 = n^2$  siempre tiene solución (si  $n > 2$ ).

Para cualquier  $n$  existen triángulos rectángulos de lados enteros de modo que uno de los catetos mide  $n$ .

¿Pasa lo mismo cambiando cateto por hipotenusa?



# Problema I: interpretación geométrica

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$x^2 - y^2 = n^2$  siempre tiene solución (si  $n > 2$ ).

Para cualquier  $n$  existen triángulos rectángulos de lados enteros de modo que uno de los catetos mide  $n$ .

¿Pasa lo mismo cambiando cateto por hipotenusa? **NO**



# Problema II

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$$x^2 - y^2 = n$$

# Problema II



Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

$$x^2 - y^2 = n$$

¿Cuántas soluciones tiene?



## Problema II: casos particulares

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

¿Cuántas soluciones tienen?

$$x^2 - y^2 = 20$$

$$x^2 - y^2 = 81$$

$$x^2 - y^2 = 36$$

$$x^2 - y^2 = 39$$



## Problema II: casos particulares

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

¿Cuántas soluciones tienen?

$$x^2 - y^2 = 20 \quad 1$$

$$x^2 - y^2 = 81 \quad 3$$

$$x^2 - y^2 = 36 \quad 2$$

$$x^2 - y^2 = 39 \quad 2$$



## Problema II: inciso

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

- Denotaremos por  $\tau(n)$  al número de divisores de  $n$ .
- Denotaremos por  $\iota(n)$  al número de divisores impares de  $n$ .



## Problema II: inciso

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

- Denotaremos por  $\tau(n)$  al número de divisores de  $n$ .
- Denotaremos por  $\iota(n)$  al número de divisores impares de  $n$ .

Cuestiones:

- ¿Es cierto que  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ ?



## Problema II: inciso

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

- Denotaremos por  $\tau(n)$  al número de divisores de  $n$ .
- Denotaremos por  $\iota(n)$  al número de divisores impares de  $n$ .

Cuestiones:

- ¿Es cierto que  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ ? **Sólo si son coprimos**



## Problema II: inciso

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

- Denotaremos por  $\tau(n)$  al número de divisores de  $n$ .
- Denotaremos por  $\iota(n)$  al número de divisores impares de  $n$ .

### Cuestiones:

- ¿Es cierto que  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ ? **Sólo si son coprimos**
- Calcula  $\tau(p^r)$  con  $p$  un primo.



## Problema II: inciso

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

- Denotaremos por  $\tau(n)$  al número de divisores de  $n$ .
- Denotaremos por  $\iota(n)$  al número de divisores impares de  $n$ .

### Cuestiones:

- ¿Es cierto que  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ ? **Sólo si son coprimos**
- Calcula  $\tau(p^r)$  con  $p$  un primo.  **$\tau(p^r) = r + 1$**



## Problema II: inciso

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

- Denotaremos por  $\tau(n)$  al número de divisores de  $n$ .
- Denotaremos por  $\iota(n)$  al número de divisores impares de  $n$ .

### Cuestiones:

- ¿Es cierto que  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ ? **Sólo si son coprimos**
- Calcula  $\tau(p^r)$  con  $p$  un primo.  **$\tau(p^r) = r + 1$**
- Con lo anterior encuentra una fórmula para  $\tau(n)$  a partir de la descomposición de  $n$  en factores primos.



## Problema II: inciso

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

- Denotaremos por  $\tau(n)$  al número de divisores de  $n$ .
- Denotaremos por  $\iota(n)$  al número de divisores impares de  $n$ .

### Cuestiones:

- ¿Es cierto que  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ ? **Sólo si son coprimos**
- Calcula  $\tau(p^r)$  con  $p$  un primo.  **$\tau(p^r) = r + 1$**
- Con lo anterior encuentra una fórmula para  $\tau(n)$  a partir de la descomposición de  $n$  en factores primos.  
 **$n = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m} \Rightarrow \tau(n) = (r_1 + 1) \cdots (r_m + 1)$**



## Problema II: inciso

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

- Denotaremos por  $\tau(n)$  al número de divisores de  $n$ .
- Denotaremos por  $\iota(n)$  al número de divisores impares de  $n$ .

### Cuestiones:

- ¿Es cierto que  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ ? **Sólo si son coprimos**
- Calcula  $\tau(p^r)$  con  $p$  un primo.  **$\tau(p^r) = r + 1$**
- Con lo anterior encuentra una fórmula para  $\tau(n)$  a partir de la descomposición de  $n$  en factores primos.  
 **$n = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m} \Rightarrow \tau(n) = (r_1 + 1) \cdots (r_m + 1)$**
- Haz lo mismo para  $\iota(n)$ .



# Problema II: solución

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

n	impar	múltiplo de 4
cuadrado	$\frac{\tau(n) + 1}{2}$	$\frac{\tau(n) + 1}{2} - \iota(n)$
no cuadrado	$\frac{\tau(n)}{2}$	$\frac{\tau(n)}{2} - \iota(n)$



# Problema III

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

Dado un primo impar  $p$ ,  
¿cuántos triángulos de lados enteros y altura  $p$  existen?



## Problema III: solución

Diferencias de  
cuadrados

Antonio M.  
Oller

Sólo hay uno, es isósceles y sus lados miden  $p - 1$  y  $\frac{p + 1}{2}$ .

