Un problema de Euler

Taller de Talento Matemático

Oliver Villa

15 de junio de 2007

Suiza

Suiza


SWISS MILK CHOCOLATE WITH HONEY AND ALMOND NOUGAT
TOBLERONE
· OF SWITZERLAND ·

Suiza

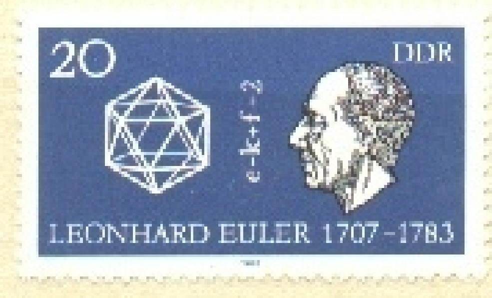

FRANCE
AUSTRIA
LIECHTENSTEIN
Mulhouse
Kempten
Schaffhausen
SH
Basel
BS
Frauenfeld
TG
AG
Aarau
ZH
Zürich
JU
Delémont
BE
Liestal
BL
SO
Solothurn
Sankt Gallen
Herisau
AR
Appenzell
AI
SG
Vaduz
Zug
ZG
LU
Lucerne
Schwyz
SZ
Glarus
GL
Neuchâtel
NE
VD
FR
Bern
BE
Stans
NW
Sarnen
OW
Altdorf
UR
Chur
GR
Lac de Neuchâtel
Fribourg
FR
VD
Lausanne
Lake Geneva
TI
Rhône
Sion
VS
Geneva
GE
Bellinzona
Lago Maggiore

Leonhard Euler

Leonhard Euler nació el 15 de abril de **1707** en Basilea, Suiza. Murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia.

Leonhard Euler

Leonhard Euler



Leonhard Euler

Leonhard Euler

Obra de Euler

- Euler es el matemático más prolífico de la historia.

Obra de Euler

- Euler es el matemático más prolífico de la historia.
- La mayor parte de su obra completa está sin publicar.

Obra de Euler

- Euler es el matemático más prolífico de la historia.
- La mayor parte de su obra completa está sin publicar.
- La labor de recopilación y publicación completa de sus trabajos comenzó en 1911 y todavía no ha acabado.

Obra de Euler

- Euler es el matemático más prolífico de la historia.
- La mayor parte de su obra completa está sin publicar.
- La labor de recopilación y publicación completa de sus trabajos comenzó en 1911 y todavía no ha acabado.
- Euler pasó los últimos años de su vida ciego, pero siguió trabajando.

Algunos símbolos introducidos por Euler

Algunos símbolos introducidos por Euler

- El símbolo e, $e = 2{,}7182818\ldots$ (en "Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta")

Algunos símbolos introducidos por Euler

- El símbolo e, $e = 2{,}7182818\ldots$ (en "Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta")
- El símbolo i (en "Institutionum calculi integralis")

Algunos símbolos introducidos por Euler

- El símbolo e, $e = 2{,}7182818\ldots$ (en "Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta")
- El símbolo i (en "Institutionum calculi integralis")
- El símbolo π, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ (en "Introductio in analysin infinitorum")

La fórmula más bella

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Un problema de cálculo combinatorio

¿De cuántas maneras podemos ordenar una serie de 4 números

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

de forma que ningún número vuelva a su posición original?

Un problema de cálculo combinatorio

¿De cuántas maneras podemos ordenar una serie de 4 números

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

de forma que ningún número vuelva a su posición original?
Por ejemplo, una posibilidad es

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 1$$

Un problema de cálculo combinatorio

Mostramos todas las posibilidades:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Un problema de cálculo combinatorio

Las disposiciones "buenas" son 9:

1234	2134	3124	**4123**
1243	**2143**	**3142**	4132
1324	2314	3214	4213
1342	**2341**	3241	4231
1423	**2413**	**3412**	**4312**
1432	2431	**3421**	**4321**

Un problema de cálculo combinatorio

¿Qué pasa con 13 números?

Un problema de cálculo combinatorio

¿Qué pasa con 13 números?

Este es el problema original, basado en un juego de cartas llamado *Treize* (trece en frances).
El problema fue resuelto antes de Euler, pero Euler obtuvo resultados generales muy interesantes.

Un problema de cálculo combinatorio

Sea $\Pi(n)$ el número de permutaciones de n números sin "puntos fijos".

Un problema de cálculo combinatorio

Sea $\Pi(n)$ el número de permutaciones de n números sin "puntos fijos".
Por ejemplo,

$$\Pi(1) = 0,$$
$$\Pi(2) = 1,$$
$$\Pi(3) = 2,$$
$$\Pi(4) = 9.$$

Una fórmula recursiva

Para $n \geq 3$, Euler demostró que:

$$\Pi(n) = (n-1)\left(\Pi(n-1) + \Pi(n-2)\right)$$

Demostración de la fórmula recursiva

Notamos que una permutación sin puntos fijos no puede empezar por 1.

Demostración de la fórmula recursiva

Notamos que una permutación sin puntos fijos no puede empezar por 1.

Supongamos que empieza por 2 y que el segundo número es 1, es decir que tenemos algo de la forma $21\ldots$.

Demostración de la fórmula recursiva

Notamos que una permutación sin puntos fijos no puede empezar por 1.

Supongamos que empieza por 2 y que el segundo número es 1, es decir que tenemos algo de la forma 21....

Tenemos $\Pi(n-2)$ permutaciones de este tipo.

Demostración de la fórmula recursiva

Notamos que una permutación sin puntos fijos no puede empezar por 1.

Supongamos que empieza por 2 y que el segundo número es 1, es decir que tenemos algo de la forma 21....

Tenemos $\Pi(n-2)$ permutaciones de este tipo.

Si en cambio el primer numero es 2 y el segundo no es 1, tenemos $\Pi(n-1)$ permutaciones.

Demostración de la fórmula recursiva

Notamos que una permutación sin puntos fijos no puede empezar por 1.

Supongamos que empieza por 2 y que el segundo número es 1, es decir que tenemos algo de la forma 21....

Tenemos $\Pi(n-2)$ permutaciones de este tipo.

Si en cambio el primer numero es 2 y el segundo no es 1, tenemos $\Pi(n-1)$ permutaciones.

Lo mismo se puede decir para los números $3, 4, \ldots, n$. Entonces, por $n \geq 3$:

$$\Pi(n) = (n-1)(\Pi(n-1) + \Pi(n-2))$$

Calculo de $\Pi(13)$

Ahora es fácil calcular, por ejemplo, $\Pi(5)$:

$$\Pi(5) = (5-1)(\Pi(5-1) + \Pi(5-2)) =$$

$$= 4(\Pi(4) + \Pi(3)) = 4(9+2) = 44$$

Calculo de $\Pi(13)$

Ahora es fácil calcular, por ejemplo, $\Pi(5)$:

$$\Pi(5) = (5-1)(\Pi(5-1) + \Pi(5-2)) =$$

$$= 4(\Pi(4) + \Pi(3)) = 4(9+2) = 44$$

Continuando de esta manera, calculamos $\Pi(6), \Pi(7), \ldots, \Pi(13)$, y finalmente encontramos que

$$\Pi(13) = 2.290.792.932$$

Más resultados de Euler

Euler todavía no estaba satisfecho:

Más resultados de Euler

Euler todavía no estaba satisfecho:
También demostró que (para $n \geq 2$)

$$\Pi(n) = n\Pi(n-1) + (-1)^n$$

Más resultados de Euler

Euler todavía no estaba satisfecho:
También demostró que (para $n \geq 2$)

$$\Pi(n) = n\Pi(n-1) + (-1)^n$$

y además que (para todo $n \geq 1$)

$$\Pi(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Más resultados de Euler

Euler todavía no estaba satisfecho:
También demostró que (para $n \geq 2$)

$$\Pi(n) = n\Pi(n-1) + (-1)^n$$

y además que (para todo $n \geq 1$)

$$\Pi(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

En conclusión, probó que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Pi(n)}{n!} = \frac{1}{e}$$

¡Gracias a todos!