Talento matemático, 9 de marzo de 2007. Bachillerato.

Seguro que sabes qué es un poliedro.
Nos ponemos de acuerdo en lo que es un poliedro.

Es un cuerpo sólido limitado por caras planas poligonales. ¡También tendríamos que ponernos de acuerdo en lo que es un polígono!

Sus **caras** son los polígonos que forman su superficie.

Sus **aristas** son segmentos, son los lados de las caras. Cada arista hace frontera de dos caras.

Sus **vértices** son los puntos extremos de las aristas. En cada vértice concurren tres o más caras.

Un poliedro parte al espacio en dos **regiones espaciales**, que son la de dentro de él y la de fuera de él.

Un **poliedro** (en griego “muchas caras”) es, en el sentido dado por la Geometría clásica al término, un cuerpo geométrico cuya superficie se compone de una cantidad finita de polígonos planos que encierran un volumen finito y no nulo.

Un **poliedro convexo** es aquel en el que se verifica que cualquier par de puntos ubicados en su interior determinan un segmento de recta también interior. Si un poliedro es convexo, está incluido en uno de los semiespacios de borde el plano que contiene a una de sus caras.

En 1750 Leonhard Euler publicó su **teorema de poliedros**, el cual indica la relación entre el número de caras, aristas y vértices de un poliedro simple (sin orificios) cualquiera, en el que también concluye que sólo pueden ser cinco los sólidos regulares y establece para ellos una serie de relaciones.

¿Qué quiere decir poliedro sin orificios?

Es el que podría hincharse o deformarse (si el material lo permitiera) hasta formar una esfera.

¿Puedes imaginar un poliedro que tenga orificios?
Imagina uno que al hincharlo se transforma en un flotador en vez de en una esfera. Por ejemplo: a un prisma le haces un orificio de arriba hasta abajo, orificio con forma también de prisma y MODIFICAS UN POCO para que sea poliedro. Cuenta las caras, aristas y vértices.

Teorema de poliedros de Euler.

Si tenemos un poliedro simple con
C := Número de caras
V := Número de vértices
A := Número de aristas

Se tiene

$$\# \; \mathbf{C} + \mathbf{V} = \mathbf{A} + 2$$

Demostraremos el teorema.
Piensa que hinchas el poliedro hasta parecerse a una esfera donde quedan dibujados los vértices y las aristas (algo deformadas pero las podemos seguir contando).

Observa que en un poliedro simple se tiene lo siguiente:

—Dos puntos cualesquiera de la superficie se pueden unir por una línea sobre la superficie que llamaremos camino (conexo).
—Cualquier línea de la superficie que sale de un punto y vuelve al mismo (lazo), la divide en regiones tales que para pasar de una a otra hay que atravesar la línea (simple).

También se tiene:
—Un camino sin lazos no divide la superficie en regiones es decir podemos pasar de un punto a otro cualquiera sin cruzar el camino.

—Dos caminos sin puntos comunes se pueden unir en uno solo.

Imaginemos ahora el poliedro como un planeta con gravedad hacia el interior.
Imaginemos las aristas como grandes muros, diques de contención de aguas y que una de las caras es un mar agitado e impetuoso.

Supongamos que vamos destruyendo diques uno tras otro, inundando caras y sin destruir diques de manera superflua (si destruimos un dique es para inundar una cara).

Afirmación: se pueden llegar a inundar todas las caras.

Tenemos así destruidos c-1 diques.

Afirmación: Entre dos vértices siempre hay un camino seco de diques sin destruir por el que poder andar.

En efecto: supongamos que ya toda la superficie está unida por las aguas, se puede pasar de un punto a otro sin diques que estorben.
Mira un vértice concreto P.
Recuerda que puedes unir dos puntos cualesquiera por una línea que no atraviesa diques sin destruir.

Si entre dos vértices concretos no existe un camino seco y lo reconstruimos, sigue habiendo paso por el agua entre dos puntos cualesquiera de la superficie.
En este caso habríamos destruido diques de manera superflua pues con menos seguimos teniendo inundadas todas las caras.

Afirmación: Entre dos vértices el camino seco de diques sin destruir por el que poder andar es único.
En efecto si hubiese dos caminos, la superficie encerrada entre los dos no se habría inundado de agua.

Ahora nos fijamos en un vértice concreto P y a cada vértice Q distinto de P le asociamos el dique que llega a Q en el camino seco de P a Q.

Tenemos una biyección entre los vértices distintos de P y los diques secos. Notar que un mismo dique no puede estar asociado a los dos vértices que une y que todos los diques están asociados a alguno de los vértices que une.

Conclusión: El número de diques A es igual al número de diques destruidos C-1 más el número de diques secos V-1 y de aquí se deduce que A = C-1 + V-1 y por tanto **C** + **V** = **A** + 2.

Otra demostración que se puede encontrar en internet:

Dice que la idea es sencilla pero… ¿Y si tiene orificios, qué falla?

La idea es sencilla. Primero demuestras que el poliedro se puede convertir en uno en que todas sus caras son triángulos. Esto se logra agregando aristas a las caras. Agregar una arista a una cara agrega también un nueva cara con lo cual la suma **V-A+C** no se altera. Quitamos ahora una de las caras, la suma **V-A+C** disminuye en uno pues no se quita ningún vértice y ninguna arista. Ahora seguimos quitando caras (que son triángulos) de la orilla, es decir, que tengan alguna arista libre. Si quitas un triángulo que tiene una sola arista libre entonces quitas sólo una arista y una cara, con lo cual la suma **V-A+C** no se altera. Si quitamos un triángulo que tiene dos aristas libres entonces desaparecen al mismo tiempo un vértice y una cara con lo cual la suma **V-A+C** tampoco se altera. Continuamos de esta manera hasta que queda un solo triángulo que es el único caso que tiene tres aristas libres y en este caso es obvio que **V-A+C=1**, así que si sumamos la cara que quitamos al comenzar nos queda que **V-A+C=2**, que es lo que queríamos demostrar.

Esto lo puedes encontrar en el libro
¿Qué es la matemática?, Courant-Robbins.

¡AUN NO ESTÁ todo en la red¡ pero casi.

Observa que la demostración del teorema de Euler es válida para cualquier subdivisión de la superficie de la esfera en regiones limitadas por arcos de curvas (mapas).

Lo de hinchar o encoger: se dice que nos lleva de una superficie a otra topológicamente equivalente.

Propiedades topológicas:

En una esfera toda curva cerrada sin puntos dobles la divide (a la esfera) en dos regiones. Si cortamos por la curva tenemos dos superficies separadas.

En un flotador podemos encontrar una curva cerrada sin puntos dobles tal que cortando por ella la superficie no se divide en dos. Pero con dos curvas cerradas que no se corten, al cortar por ellas tenemos la superficie partida.

Imagina una superficie con 3 ó 4 curvas cerradas no secantes que cortando no se divide la superficie.

Eso son los orificios (género).

La fórmula generalizada para todo tipo de poliedros es:

C – A + V = 2 - 2h

Siendo h el número de orificios.

El poliedro de Szilassi

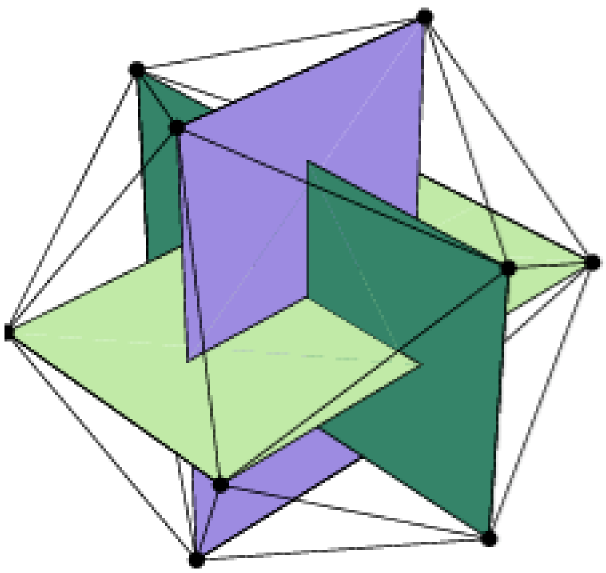
(Tomado de la red)

Comenzar por los llamados sólidos platónicos me parece lo más apropiado. Como sabrán, los poliedros regulares son aquellos cuerpos sólidos cuyas caras son polígonos regulares, todas ellas iguales. Existen cinco (ni uno más ni uno menos), que son: el tetraedro, el hexaedro o cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Cada uno de los cinco es una pequeña maravilla, que queda empequeñecida ante la magnificencia de la demostración de que estos son todos los poliedros regulares. Esta demostración es (según mi humilde entender) una de las más bonitas cosas que los matemáticos hayan realizado nunca. No en vano, el propio Carl Sagan no pudo resistirse, y en las últimas páginas de su best seller *Cosmos* incluyó la demostración. Hizo bien. Incluyó también la demostración de que la raíz cuadrada de dos es un número irracional, algo de importancia imposible de calibrar si uno no sabe previamente el horror que tal hecho causaba a los griegos, pero esa es otra historia.

La demostración que explica Sagan de que cinco son los sólidos platónicos, o regulares, se basa en el anterior **Teorema de Euler .**

La existencia de los cinco sólidos merece ser comentada.



Ejercicio: ¿Qué proporciones tienen los rectángulos para que sea un poliedro regular?

De entre los cinco sólidos platónicos, sólo uno cumple la propiedad de que dado un par de caras, tienen frontera común: una arista. Para los otros cuatro, siempre podemos encontrar dos caras que no se toquen, y por lo tanto no compartan ninguna arista.

Nuestra pregunta es doble: ¿existen más poliedros (regulares o no) que exhiban esta propiedad del tetraedro? ¿Caso de existir, qué podemos saber de ellos?

Posteriormente, presentaremos tal cuerpo: el **poliedro de Szilassi** .

Centrémonos en nuestra pregunta: **¿puede existir algún poliedro, además del tetraedro (regular o no) tal que cualquier par de caras tenga una arista en común?**

Sabemos que, si no tiene agujeros, debe cumplir la relación:

(1) $C - A + V = 2$

Además, podemos establecer una relación entre las caras y las aristas. Efectivamente, habrá tantas aristas como parejas de caras (dos aristas determinan un plano). Si tenemos C caras, tendremos C(C-1)/2 aristas.

¿Por qué? Pues muy sencillo: Dada una cara cualquiera, tiene (C-1) caras más con las que formar una arista, luego tendremos C(C-1)/2 posibilidades. Dividimos por 2 porque cada arista ha sido contada dos veces: cuando tomábamos una de las caras, y cuando tomábamos la otra. Dicho de otra forma: el número de aristas es igual al número de parejas de caras, que es la combinación de C elementos tomados de dos en dos.

Así pues, tenemos:

(2) $A = C (C - 1) / 2$

Respecto a los vértices, ¿podemos decir algo? Pues sí, podemos: en un vértice deberán unirse exactamente tres aristas. Menos de tres es imposible si queremos tener un sólido con volumen; y si fueran cuatro o más, tendríamos dos caras que sólo comparten un vértice (si comparten tres es la misma cara), y queremos que toda pareja de caras comparta una arista. También sabemos que una arista corresponde por definición a dos vértices, luego podríamos contar el número de aristas contando el número de vértices, multiplicándolo por tres y dividiendo entre dos.

(Un vértice pertenece a dos aristas de la misma cara que nos llevan a sendas caras distintas, si pertenece a otras dos de distintas caras existe una cara que no tiene estas aristas en común tendría que tener otra y con el vértice serían tres vértices en común.)
Por lo tanto:

(3) $A = 3V/2 \Rightarrow V = 2A/3$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas: sustituyendo la segunda y la tercera en la primera, obtenemos lo siguiente:

$$C^2 - 7C + 12 = 0,$$

que tiene dos soluciones: C=3 y C=4.

Con tres caras no tenemos poliedro alguno, y con cuatro tenemos lo que ya sabíamos: **EL TETRAEDRO**. Por lo tanto, no existen más poliedros, al menos sin agujeros, que cumplan la propiedad del tetraedro.

Hemos demostrado un teorema de inexistencia, y eso es más fuerte de lo que en principio parece: no existe, ni existirá ni ha existido jamás un poliedro tridimensional sin agujeros con la propiedad de que toda pareja de caras se encuentra en una arista, salvo en el tetraedro (regular o no, eso no importa ahora).

Debemos pues buscar entre objetos más exóticos: vayamos a los poliedros con un agujero; topológicamente equivalentes a un toro o una rosquilla.

Dentro de esa fauna encontraremos lo que queremos.

Vamos a investigar si puede existir un poliedro tridimensional con un agujero (topológicamente similar a una rosquilla o a un toro) que tenga *la propiedad tetraedral* consistente en que todo par de sus caras se encuentra en una arista.

Ahora el **"Teorema de Euler"** nos dice que $\mathbf{C - V + A = 2 - 2h}$.

Como h es el número de agujeros, y ahora tenemos uno, la cosa queda así: $\mathbf{C - V + A = 0}$.

Las otras dos ecuaciones que ligaban aristas, vértices y caras permanecen invariables, pues surgían naturalmente de la imposición de que cara par de caras compartieran una arista común.

Si introducimos aquellas dos ecuaciones, que eran:

$\mathbf{A = C (C - 1) / 2}$
$\mathbf{V = 2 A / 3}$,

obtenemos:

$\mathbf{C^2 - 7C = 0}$, que es lo mismo que:
$\mathbf{C (C - 7) = 0}$,

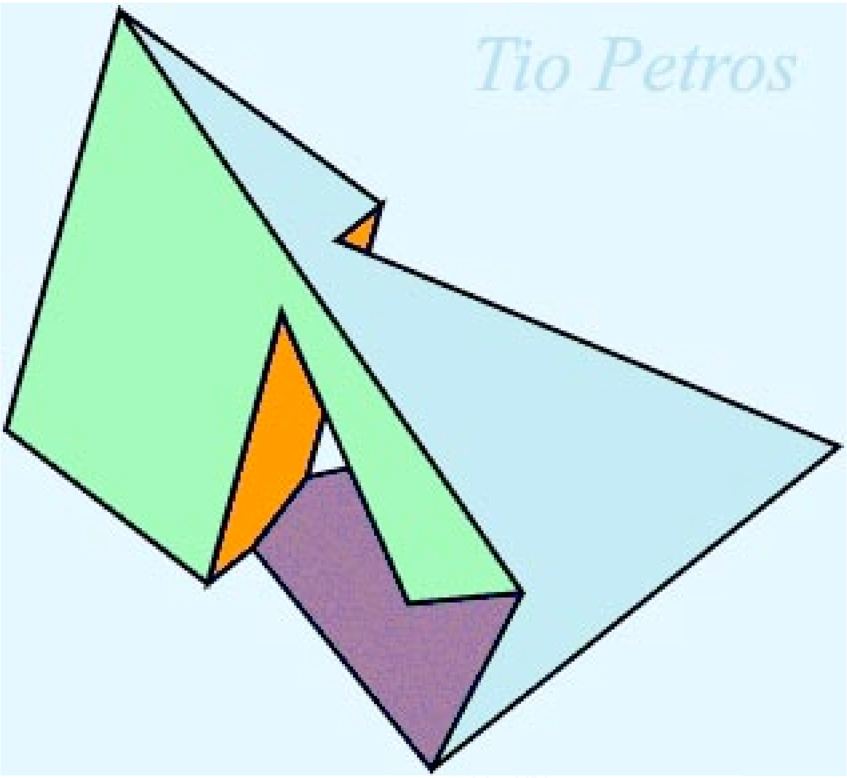
que tiene dos soluciones C=0 y C=7. La primera no nos interesa, porque con cero caras poco podemos hacer, y la segunda es la gran sorpresa:

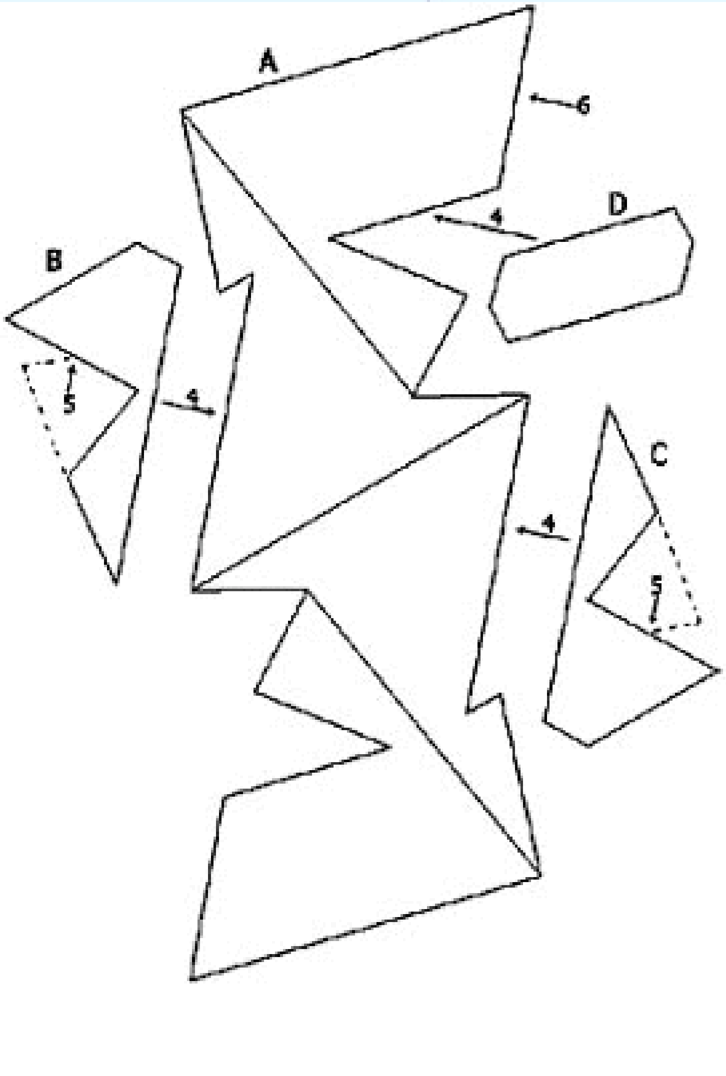
Con siete caras, tenemos A=(7x6)/2=21 aristas y V=21x2/3=14 vértices. Así pues, parece existir un extraordinario poliedro con tan sólo siete caras, con 21 aristas y 14 vértices, que es topológicamente similar a una rosquilla por tener un agujero, y que además cada par de caras se encuentran en una arista. Podemos saber además que todas las caras son hexagonales, pues cada una de las siete debe tener una arista común con las seis restantes. Sabemos también que de cada vértice salen exactamente tres aristas.

Lajos Szilassi presentó en sociedad tal joya geométrica en el año 1977: el **heptaedro toroidal**, o poliedro de Szilassi.

Tiene exactamente las propiedades que hemos predicho: tiene un agujero, siete caras hexagonales, 21 aristas y 14 vértices. Pueden admirarlo en la figura. Si alguien tiene el interés de construirlo, tiene también el desarrollo del mismo.

¿Os han hablado del número de colores necesario para colorear un mapa?
. ¿Qué relación tiene esto con el poliedro de Szilassi?


Tio Petros


A
6
4
D
B
4
5
C
4
5