El Teorema de Pick

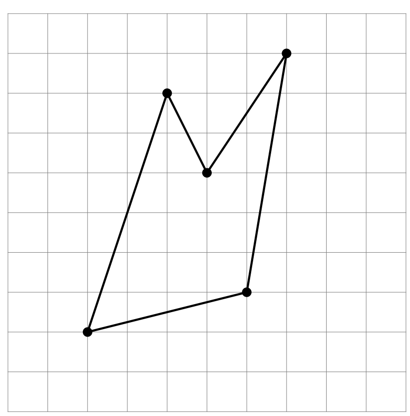
(12 de enero de 2007)

Alberto Elduque
Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.
http://www.unizar.es/matematicas/algebra/elduque

Esta sesión está dedicada a encontrar y demostrar un resultado muy curioso, que permite calcular fácilmente las áreas de los polígonos cuyos vértices están en los nodos de una cuadrícula.

1. El Teorema de Pick

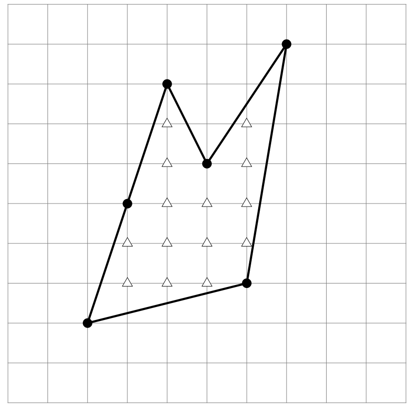
Nuestro objetivo es encontrar una fórmula, originalmente descubierta por Pick en 1899[1], para calcular el área de polígonos simples (esto es, sus lados no se cortan entre sí) cuyos vértices son nodos de una cuadrícula, como ocurre en la siguiente figura:



El área, se obtiene en función de los nodos de la cuadrícula que están en el perímetro del polígono y de los que están en el interior del

[1]Georg Alexander Pick nació en Viena en 1859 y murió en 1943 en un campo de contentración nazi. Publicó su resultado en un artículo titulado *Geometrisches zur Zahlenlehre*, en la revista Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift **19** (1899), páginas 311-319, Praga.

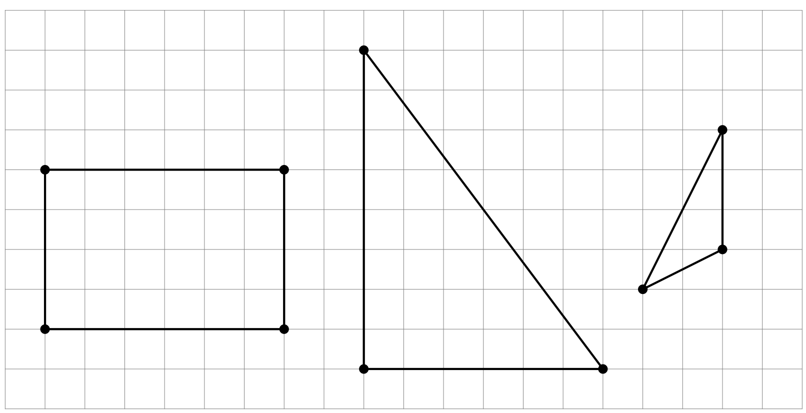
polígono:



La unidad de medida del área que tomaremos es el área de los cuadrados que forman la cuadrícula. Denotaremos por I el número de nodos interiores, y por B el número de nodos del perímetro. En el ejemplo anterior $I = 14$ y $B = 6$.

Pasos a seguir para descubrir la fórmula

- Dibuja varios polígonos sencillos y calcula sus áreas y sus números I y P:



- Si supieras que la fórmula es del tipo

$$\mathcal{A} = aI + bB + c,$$

  donde a, b y c son constantes, ¿cuál sería el valor de estas constantes[2]?

- ¡No pases de página hasta tener una conjetura razonable sobre cuál es la fórmula de Pick!

[2]Cada uno de los polígonos con los que has trabajado te da una ecuación en las variables a, b y c.

Teorema de Pick (1899): El área de todo polígono simple cuyos vértices son nodos de la cuadrícula es

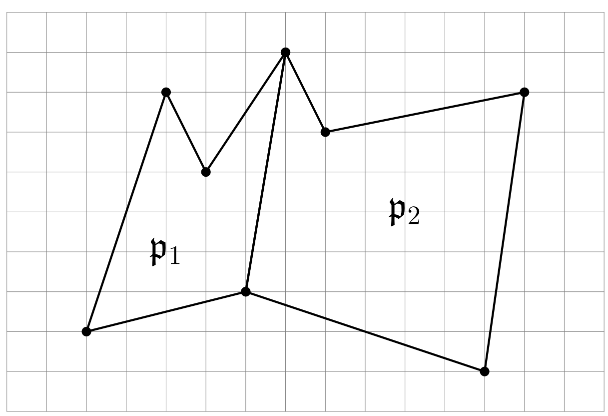
$$\mathcal{A} = I + \frac{1}{2}B - 1$$

2. Demostración del Teorema de Pick

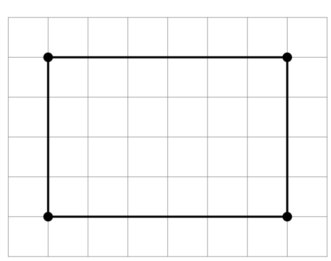
El siguiente objetivo es demostrar que esta fórmula es válida para cualquier polígono simple cuyos vértices están en la cuadrícula, y no sólo para los ejemplos que hemos utilizado.

Para ello, puedes proceder como sigue:

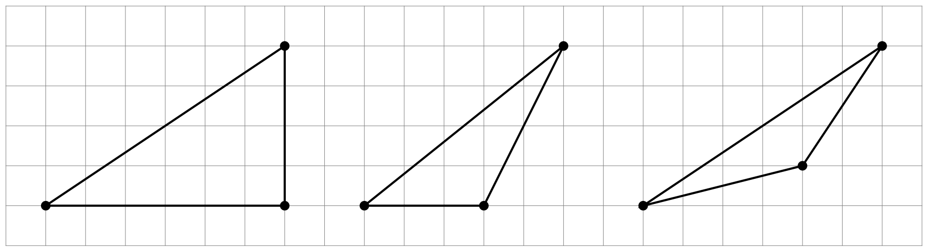
Primer paso: Prueba que si la fórmula es válida para dos polígonos con interiores disjuntos, pero que están unidos por una arista común, entonces también es válida para el polígono formado por la unión de los dos anteriores.



Segundo paso: Prueba que la fórmula es válida para rectángulos con lados horizontales y verticales.



Tercer paso: Prueba que la fórmula es válida para triángulos.



Puesto que todo polígono se puede poner como unión de triángulos (unidos por aristas), estos pasos garantizan la validez de la fórmula para cualquier polígono simple con vértices en la cuadrícula.

En la sección siguiente se explica cómo probar cada uno de estos pasos.

Como aplicación del Teorema de Pick, intenta hacer el siguiente ejercicio:

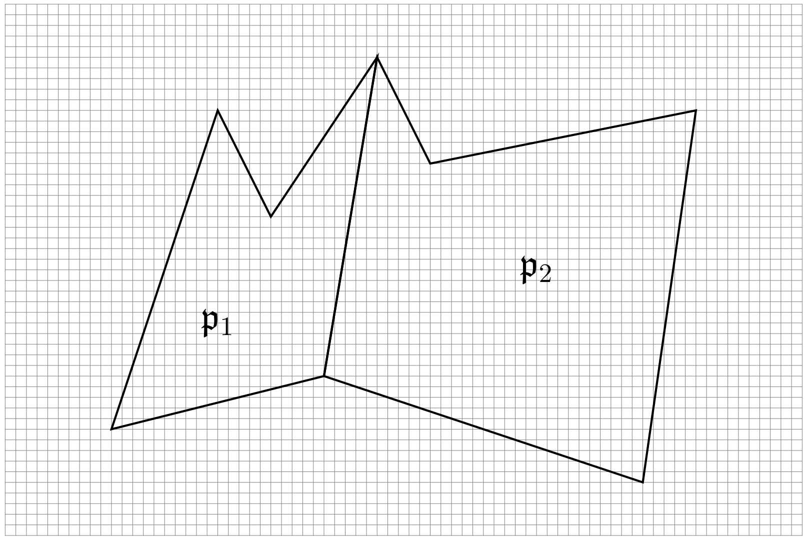
Ejercicio: Muestra que no existe ningún triángulo equilátero cuyos vértices sean nodos de la cuadrícula.

3. Soluciones

Primer paso: Sean $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ dos polígonos como en la figura, y sea $\mathfrak{p}$ el polígono obtenido uniéndolos. Llamaremos *número de Pick* de $\mathfrak{p}$ al número

$$\mathcal{P} = I + \frac{1}{2}B - 1,$$

donde I y B son, respectivamente, el número de nodos interiores y en el perímetro de $\mathfrak{p}$. Análogamente denotamos por $\mathcal{P}_1$ el número de Pick de $\mathfrak{p}_1$, siendo I_1 y B_1 los números de nodos interiores y en el perímetro de $\mathfrak{p}_1$, y por $\mathcal{P}_2$, I_2 y B_2 los de $\mathfrak{p}_2$.



Sea E el número de nodos de la cuadrícula en la arista común. Entonces:

$$\begin{aligned} B &= (B_1 - E) + (B_2 - E) + 2 \\ &\qquad \text{(el 2 corresponde a los vértices de la arista común)} \\ &= B_1 + B_2 - 2E + 2 \end{aligned}$$

$$I = I_1 + I_2 + E - 2$$

luego

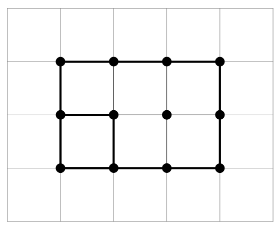
$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= I + \frac{1}{2}B - 1 \\ &= (I_1 + I_2 + E - 2) + \frac{1}{2}(B_1 + B_2 - 2E + 2) - 1 \\ &= I_1 + I_2 + \frac{1}{2}(B_1 + B_2) - 2 \\ &= \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2. \end{aligned}$$

Así, como suponemos que el Teorema de Pick es válido para $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$, y el área de $\mathfrak{p}$ es la suma de las áreas de $\mathfrak{p}_1$ y de $\mathfrak{p}_2$, se tiene, denotando por $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ las áreas respectivas:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \\ &= \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \quad \text{(pues el resultado es válido para } \mathfrak{p}_1 \text{ y } \mathfrak{p}_2\text{)} \\ &= \mathcal{P},\end{aligned}$$

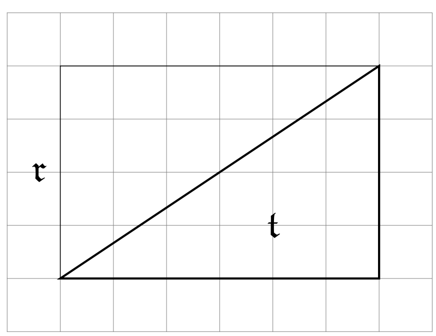
como deseábamos.

Segundo paso: Quizá el modo más fácil de probar que la fórmula de Pick es válida para rectángulos de lados horizontales y verticales es darse cuenta de que dichos rectángulos se obtienen uniendo cuadrados de área 1 (y número de Pick $0 + \frac{1}{2}4 - 1 = 1$), y aplicar el resultado probado en el paso anterior. También se puede dar una demostración directa.



Tercer paso: Nos aparecen tres posibilidades.

1. Si el triángulo es rectángulo con catetos horizontales y verticales, procedemos así:

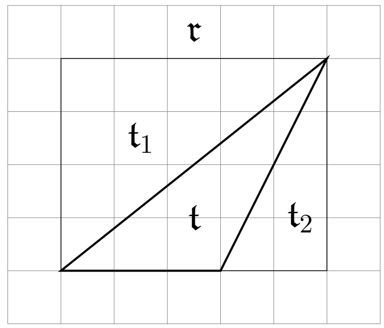


Sea $\mathfrak{t}$ el triángulo y $\mathfrak{r}$ el rectángulo formado uniendo $\mathfrak{t}$ y su simétrico respecto a la hipotenusa. Con notaciones obvias sabemos:

- $\mathcal{A}_\mathfrak{r} = \mathcal{P}_\mathfrak{r}$, gracias al segundo paso,
- $\mathcal{P}_\mathfrak{r} = 2\mathcal{P}_\mathfrak{t}$, gracias al primer paso, y
- el área de $\mathfrak{r}$ es el doble que el área de $\mathfrak{t}$: $\mathcal{A}_\mathfrak{r} = 2\mathcal{A}_\mathfrak{t}$.

Concluimos, por tanto, que $\mathcal{A}_\mathfrak{t} = \mathcal{P}_\mathfrak{t}$, como deseábamos.

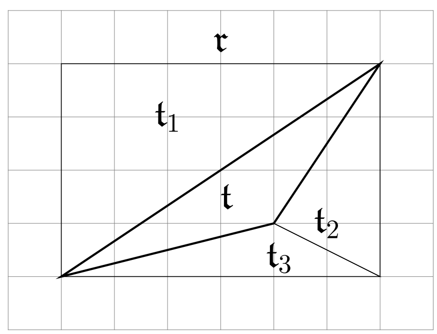
2. Si nuestro triángulo $\mathfrak{t}$ tiene sólo un lado horizontal (o vertical), como en la figura:



en este caso, formamos el rectángulo $\mathfrak{r}$ uniendo a nuestro triángulo $\mathfrak{t}$ los triángulos $\mathfrak{t}_1$ y $\mathfrak{t}_2$. Ahora sabemos:
   - $\mathcal{A}_\mathfrak{r} = \mathcal{P}_\mathfrak{r}$, gracias al segundo paso,
   - $\mathcal{A}_{\mathfrak{t}_1} = \mathcal{P}_{\mathfrak{t}_1}$ y $\mathcal{A}_{\mathfrak{t}_2} = \mathcal{P}_{\mathfrak{t}_2}$ por el caso anterior,
   - $\mathcal{P}_\mathfrak{r} = \mathcal{P}_{\mathfrak{t}_1} + \mathcal{P}_\mathfrak{t} + \mathcal{P}_{\mathfrak{t}_2}$, gracias al primer paso, y
   - el área verifica $\mathcal{A}_\mathfrak{r} = \mathcal{A}_{\mathfrak{t}_1} + \mathcal{A}_\mathfrak{t} + \mathcal{A}_{\mathfrak{t}_2}$.

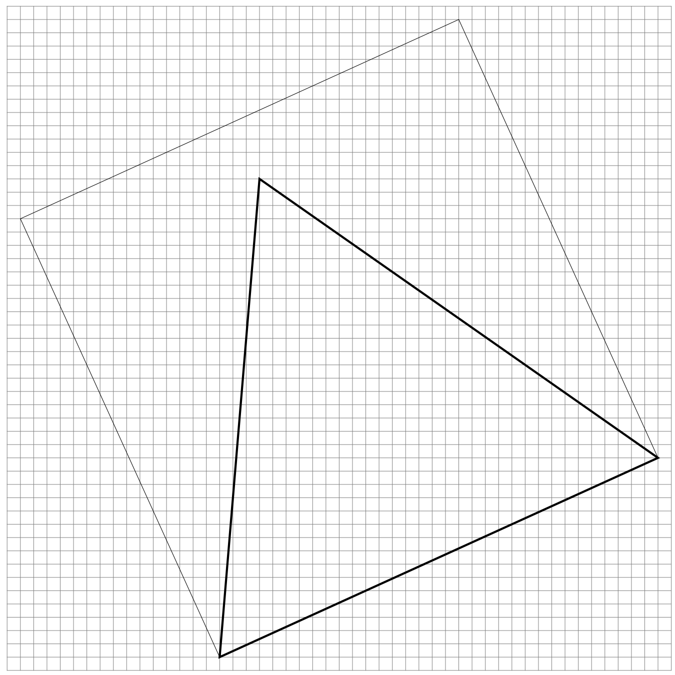
   De nuevo concluimos que $\mathcal{A}_\mathfrak{t} = \mathcal{P}_\mathfrak{t}$.

3. Por último, si nuestro triángulo $\mathfrak{t}$ no tiene ningún lado horizontal ni vertical, como en la figura



hacemos un razonamiento análogo al del caso anterior, terminando así la demostración del Teorema de Pick.

Solución del ejercicio: Si pudiéramos dibujar un triángulo equilátero con vértices en la cuadrícula:



por el Teorema de Pick tendríamos que su área es un número racional (de hecho es o bien un número natural, o la mitad de un número natural). Por otra parte, su área es la mitad de su base b por su altura h, y ésta es $h = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Luego el área del triángulo es $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$. Pero b^2 es el área del cuadrado que aparece en la figura, y por el Teorema de Pick b^2 es racional. De aquí se deduce que $\sqrt{3}$ es racional, y esto sabemos que no es cierto.

4. Para saber más

Para saber más sobre el Teorema de Pick y algunos temas relacionados puedes consultar, si no te asusta el inglés, la *Wikipedia* en

`http://en.wikipedia.org/wiki/Pick's_theorem`

Una magnífica referencia en la web es

`http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick.shtml`

donde puedes encontrar otras referencias y actividades relacionadas.